Εγγράψιμα και περιγράψιμα τετράπλευρα

Ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

	Σωστό	Λάθος
1. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι παραλληλόγραμμο.	☐	☐
2. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι ορθογώνιο.	☐	☐
3. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν είναι ορθογώνιο.	☐	☐
4. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι ρόμβος.	☐	☐
5. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν είναι τραπέζιο.	☐	☐
6. Αν η διάμεσος ενός τραπεζίου το χωρίζει σε δύο εγγράψιμα τραπέζια τότε το αρχικό τραπέζιο είναι εγγράψιμο.	☐	☐
7. Υπάρχουν τετράπλευρα που είναι συγχρόνως εγγράψιμα και περιγράψιμα σε κύκλο.	☐	☐
8. Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι εγγράψιμο σε κύκλο είναι τετράγωνο.	☐	☐
9. Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι περιγράψιμο σε κύκλο είναι τετράγωνο.	☐	☐
10. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται απ’ το ίδιο σημείο.	☐	☐
11. Αν ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο τότε οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα.	☐	☐
12. Αν ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε η διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγώνιές του.	☐	☐
13. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο τότε οι διαγώνιές του διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.	☐	☐

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, θέτοντας κατάλληλα σε κάθε τετραγωνάκι των στηλών (Β) και (Γ) μια απ’ τις λέξεις: *πάντα, όχι πάντα, ποτέ.*

στήλη (Α) **τετράπλευρο**	**στήλη (Β)** **το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο**	**στήλη (Γ)** **το τετράπλευρο είναι περιγράψιμο**
παραλληλόγραμμο		
ορθογώνιο		
τετράγωνο		
ρόμβος		
ισοσκελές τραπέζιο		

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

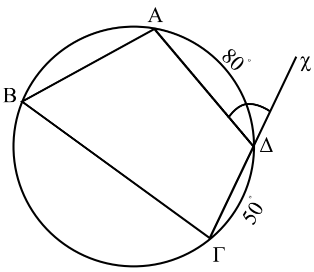
1. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε κύκλο και έχει διάμεσο ίση με α. Η περίμετρός του ισούται με:
   Α. 3α **Β.** 4α **Γ.** 5α **Δ.** 6α **Ε.** 7α

2. Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι σε κύκλο:
   Α. εγγράψιμο και όχι περιγράψιμο
   Β. περιγράψιμο και όχι εγγράψιμο
   Γ. ούτε εγγράψιμο, ούτε περιγράψιμο
   Δ. εγγράψιμο και συγχρόνως περιγράψιμο
   Ε. τίποτα από τα παραπάνω

3. Στο διπλανό σχήμα είναι τόξο ΑΔ = 80° και τόξο ΓΔ = 50°. Η γωνία ΑΔx ισούται με:

Α. 80° **Β.** 90° **Γ.** 105°

Δ. 115° **Ε.** 130°



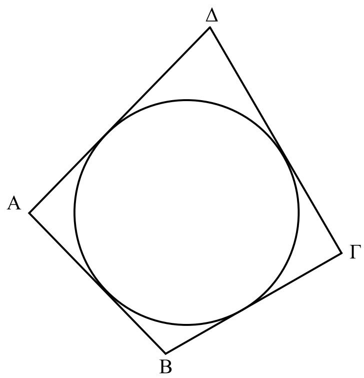
4. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και η Α γωνία του είναι τετραπλάσια της Γ. Η γωνία Α ισούται με:

Α. 36° **Β.** 45° **Γ.** 72° **Δ.** 90° **Ε.** 144°

5. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 25 cm και ΑΔ = 8 cm. Το μήκος της ΒΓ σε cm είναι:

Α. $\frac{17}{2}$ **Β.** 6 **Γ.** 5,5

Δ. 5 **Ε.** 4,5



6. Ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία Β και Γ κόβονται στο Δ. Είναι ΑΒΓ = ΒΓΑ = 2Δ και x το μέτρο της Α σε ακτίνια. Η x ισούται με:

Α. $\frac{3}{7}\pi$ **Β.** $\frac{4}{9}\pi$ **Γ.** $\frac{5}{11}\pi$ **Δ.** $\frac{6}{13}\pi$**Ε.** $\frac{7}{15}\pi$

(Δόθηκε σε διαγωνισμό ΕΜΕ - Θαλής 1992)

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται με κορυφές τα σημεία τομής των διχοτόμων ενός τετραπλεύρου είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

2. Να αποδείξετε ότι:

α) Τέσσερις εφαπτόμενες ευθείες ενός κύκλου, παράλληλες ανά δύο, σχηματίζουν ένα ρόμβο περιγεγραμμένο στον κύκλο.

β) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο είναι ορθογώνιο.

3. Από το μέσο Γ ενός τόξου ΑΒ κύκλου με κέντρο Ο γράφουμε δύο χορδές ΓΔ και ΓΕ που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΖΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

4. Από σημείο Ρ του ύψους ΑΔ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΡΕ$\perp$ΑΒ και ΡΖ$\perp$ΑΓ.

α) Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία της στήλης (Α) με την ίση γωνία της στήλης (Β).

Στήλη (Α)	**στήλη (Β)**
ΑΖΕ	ΑΓΔ
	ΑΡΕ
ΑΡΖ	ΕΑΡ
	ΑΕΖ
ΡΕΖ	ΡΑΖ

β) Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

γ) Τα εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος σε αριθμό είναι:

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** 6

5. Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ . ΑΓ = ΑΔ . ΑΕ

β) $ΕΒ^2$ = ΕΑ . ΕΔ

6. Στα άκρα της χορδής ΑΒ ενός κύκλου φέρνουμε τις κάθετες χορδές του κύκλου. Να αποδείξετε ότι οι χορδές αυτές είναι απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) περιγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Αν Ε, Δ, Θ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ με τον κύκλο και η διακεντρική ευθεία από το Α κόβει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Δ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ ισούται με τη γωνία ΑΟΘ.

8. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ που έχει ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ και Β = Γ = Δ. Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

9. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι:

α) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΕΔ είναι ίσοι.

β) Οι τρεις παραπάνω κύκλοι του ερωτήματος (α) διέρχονται από το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

10. Δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Ο΄ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α γράφουμε τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Γ και τον Ο΄ στο Δ. Από το Β γράφουμε άλλη τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Ε και τον Ο΄ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΕΓ // ΖΔ.

11. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α = 90° και Β = 30°, το ΑΗ ύψος και την ΑΜ διάμεσο. Από το σημείο Β φέρνουμε τη ΒΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) ΒΕ = ΕΗ = ΑΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Με τη χρήση αβαθμολόγητου χάρακα και διαβήτη

1. Αν α, β, γ είναι δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευασθεί το ευθύγραμμο τμήμα x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

β) $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

γ) $x = \sqrt{\alpha\beta}$

δ) $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}$

2. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ, ρ) και τόξο ΑΒ του (Ο, ρ). Να κατασκευασθεί τόξο ΜΝ του (Κ, ρ) ώστε να είναι ΜΝ = $\dfrac{1}{2}$ ΑΒ.

3. Να χωριστεί μια γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.

4. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα κ, λ και η γωνία ω. Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ με δοσμένα: ΑΒ = κ, ΑΓ = λ και Α = ω.

5. Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζουμε:

α) Την πλευρά α, τη γωνία Β και τη διάμεσο μ_γ.

β) Τις πλευρές β, γ και το ύψος υ_α.

γ) Τις πλευρές α, γ και τη διάμεσο μ_α.

Να γίνει διερεύνηση.

6. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που θα έχει υποτείνουσα ΒΓ = κ και ύψος ΑΔ = λ, όπου κ και λ δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα. Να γίνει διερεύνηση.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

Μπορούν να θεωρηθούν όλες όσες περιλαμβάνονται στο Σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας, έκδοσης 1998, στις σελίδες 103, 150, 151.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Γράφουμε δύο χορδές κύκλου, τις ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Ε. Οι εφαπτόμενες ευθείες του κύκλου στα σημεία Α και Γ τέμνονται στο Ζ και οι εφαπτόμενες στα Β και Δ τέμνονται στο Η.

α) Να αποδείξετε ότι: ΑΖΓ + ΒΗΔ = 2ΑΕΔ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΓΕΒ, όταν είναι εγγράψιμο το τετράπλευρο, που έχει κορυφές τα σημεία Ζ, Η, το σημείο τομής των εφαπτομένων ΖΓ και ΗΒ και το σημείο τομής των ΖΑ και ΗΔ.

2. Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΑΓ. Αν η κάθετη ευθεία από το σημείο Β προς την ΑΔ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και από την κορυφή Β ευθεία κάθετη στη διχοτόμο Αx της Α που τέμνει την Αx στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και Η η προβολή του Γ στην Αx να αποδείξετε ότι:

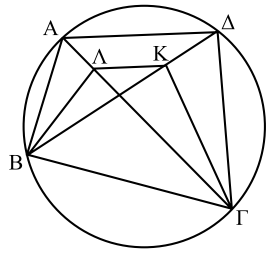
α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

β) ΕΜ // ΑΓ.

γ) Το τετράπλευρο ΑΔΗΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

δ) Το τετράπλευρο ΔΕΜΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

4. Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διχοτόμος της γωνίας ΔΓΑ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Κ, ενώ η διχοτόμος της γωνίας ΑΒΔ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΚΛΒΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) Οι ΚΛ και ΑΔ είναι παράλληλες.

(Δόθηκε σε διαγωνισμό ΕΜΕ - Απρίλιος 1997).

5. Σ’ ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, τέτοιο ώστε η ΑΒ να είναι παράλληλη προς τη ΔΕ και η ΑΕ προς τη ΒΓ. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α είναι παράλληλη προς τη ΓΔ.

(Δόθηκε σε διαγωνισμό ΕΜΕ - Θαλής 1996).

6. Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα που είναι όμοια. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των υποτεινουσών είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομολόγων κάθετων πλευρών τους.

7. Δίνεται κύκλος (Ο, R). Γράφουμε μια διάμετρό του ΕΖ και παίρνουμε δύο σημεία Α, Β πάνω σ’ αυτή συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο, έτσι ώστε $AB = R\sqrt{2}$. Αν ΓΔ είναι χορδή του κύκλου που περνά από το Β και είναι κάθετη στην ΕΖ, να αποδείξετε ότι: $ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = 7R^2$.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με Β = 2Γ. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = 3$.

9. Δίνονται τρεις κύκλοι ώστε να είναι εγγεγραμμένοι στην ίδια γωνία και ο μεσαίος να εφάπτεται των δύο άλλων. Αποδείξτε ότι η ακτίνα του μεσαίου κύκλου είναι μέση ανάλογη των ακτίνων των δύο άλλων.

ή αλλιώς:

Τρεις κύκλοι (Ο, ρ_1), (Κ, ρ_2), (Λ, ρ_3) εφάπτονται εξωτερικά ανά δυο και τα κέντρα τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Αν είναι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ να αποδείξετε ότι: $\rho_2^2 = \rho_1\rho_3$.

10. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μια διάμετρος ΒΓ αυτού και μια χορδή του ΑΔ παράλληλη στη ΒΓ. Αν η απόσταση των ΒΓ και ΑΔ είναι $\frac{R}{2}$, να υπολογισθούν συναρτήσει του R οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

11. Δίνεται η εφαπτομένη ε σ' ένα σημείο Α ενός κύκλου. Αν μια ευθεία ε΄ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Γ και την ευθεία ε στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι: $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{M\Gamma}$.

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°). Με διάμετρο την ΑΓ γράφουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου στο σημείο Δ διέρχεται από το μέσον της ΑΒ.

13. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο (Α = 90°) εγγράφουμε ένα τετράγωνο, ώστε η μια πλευρά του τετραγώνου να βρίσκεται πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ. Αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί την ορθή γωνία Α.

14. Σε κύκλο κέντρου Ο γράφουμε την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ, φέρνουμε τη διχοτόμο ΟΓ αυτής και στην ΟΓ χορδή κάθετη που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η. Αν η ΖΗ τέμνει την ΟΑ στο Δ και την ΟΒ στο Ε, να δείξετε ότι:
α) ΖΔ = ΕΗ και
β) ΑΔ = ΒΕ

15. Από σημείο Γ εκτός κύκλου κέντρου Ο γράφουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΓΑ και ΓΒ. Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και στην προέκταση του ΑΓ προς το μέρος του σημείου Γ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Η γωνία ΑΒΕ είναι ορθή.
β) Τα σημεία Δ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

16. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους λ κινείται, έτσι ώστε τα άκρα του να βρίσκονται σε δύο κάθετους άξονες Οx, Οy. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο ΒΟΑΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ.

17. Δίνεται μια ευθεία xy και ένα σημείο Α αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται της xy στο σημείο Α.

18. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι είναι ίσοι και εφάπτονται σε δοσμένο κύκλο.

19. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από σταθερό σημείο Α και έχουν δοσμένη ακτίνα.

20. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, ο οποίος εφάπτεται μιας δοσμένης ευθείας xy σ' ένα σημείο Α. Δίνεται ακόμα ένα άλλο σημείο Β της xy. Να γραφεί κύκλος, ο οποίος να εφάπτεται στην ευθεία xy στο σημείο Β και στον κύκλο κέντρου Ο.