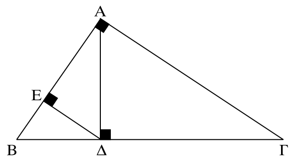
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Το Θεώρημα του Θαλή και οι Συνέπειές του

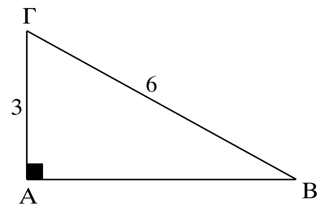
- **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ**

1. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.
Αν ΑΔ $\perp$ ΒΓ, ΕΔ $\perp$ ΑΒ τότε το τρίγωνο ΑΔΕ **δεν** είναι όμοιο με το:

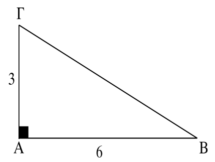


α) ΑΒΓ β) ΑΔΓ γ) ΑΔΒ
δ) ΕΒΔ ε) ΑΕΓ

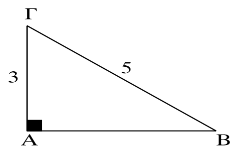
2. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) είναι όμοιο με το:



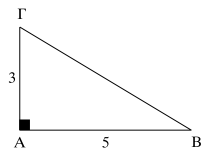
α)



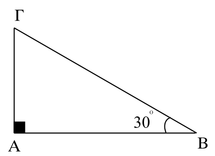
β)



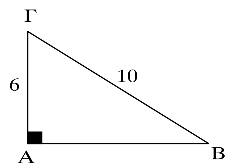
γ)



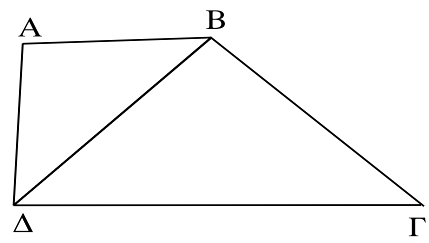
δ)



ε)

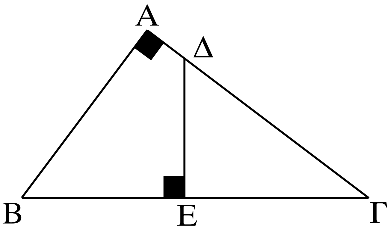


3. Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι όμοια. Αν ΔΑ = 4, ΓΔ = 9, τότε η ΒΔ είναι:



α) 5 β) 6 γ) $5\sqrt{3}$
δ) 8 ε) $8 + \sqrt{3}$

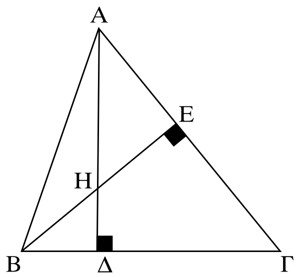
4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°), ΔΕ ⊥ ΒΓ.
Αν ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και ΔΕ = 4, τότε το ΕΓ ισούται με:



α) $\frac{16}{3}$ β) $\frac{20}{3}$ γ) 5

δ) 6 ε) $\frac{19}{4}$

5. Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ΑΔ και ΒΕ είναι ύψη. Το τρίγωνο ΑΗΕ είναι όμοιο με το:



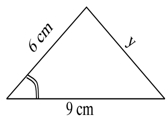
α) ΑΗΓ β) ΔΗΕ γ) ΔΗΒ

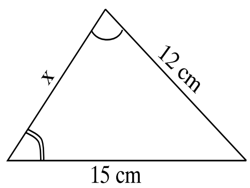
δ) ΑΗΒ ε) ΑΒΓ

6. Για καθεμιά απ’ τις τρεις περιπτώσεις να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

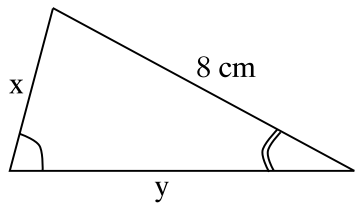
	x	y
(Α)		
(Β)		
(Γ)		

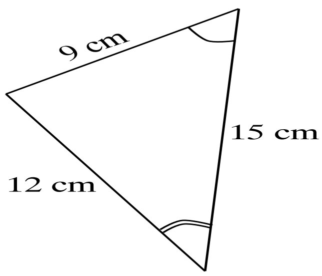
(Α)



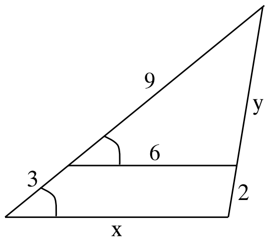


(Β)

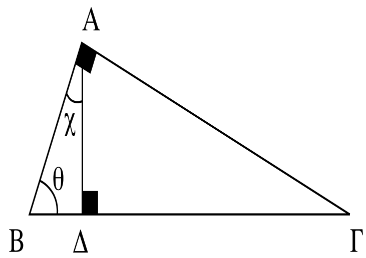




(Γ)



7. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και ΑΔ ύψος του.



Α. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη θ

Β. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη x

Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ....Α....

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ....Β....

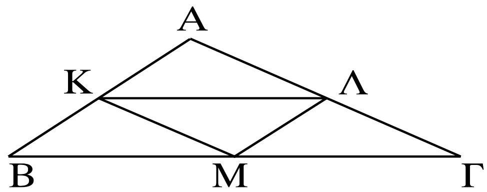
γ) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι όμοιο με το ....Γ....

Δ. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες απαντήσεις, συμπληρώστε τις αναλογίες:

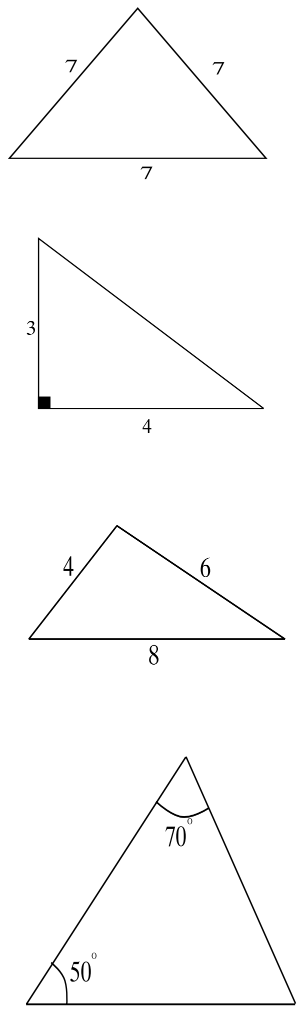
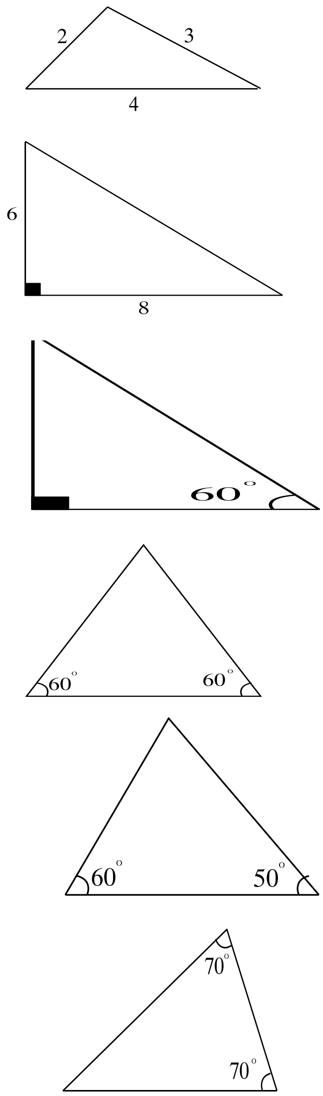
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\_\_\_}, \qquad \frac{\_\_\_}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{\text{ΒΑ}}, \qquad \frac{\text{ΑΔ}}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{\text{ΒΓ}} = \frac{\_\_\_}{\text{ΑΓ}},$$

8. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές με μήκη 12 cm, 8 cm και 6 cm. Το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ έχει περίμετρο ίση με:

α) 20 cm β) 18 cm γ) 14 cm δ) 13 cm ε) 10 cm

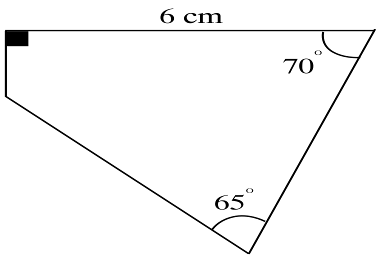


2. Κάθε τρίγωνο της πρώτης στήλης είναι όμοιο με ένα τρίγωνο της δεύτερης στήλης. Συνδέστε με μία γραμμή τα όμοια τρίγωνα:

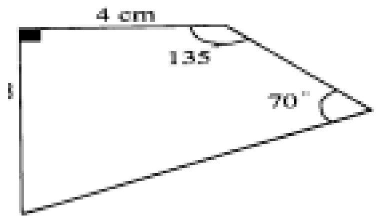
στήλη (Α)	**στήλη (Β)**
	

10. Τρία από τα παρακάτω σχήματα είναι όμοια.

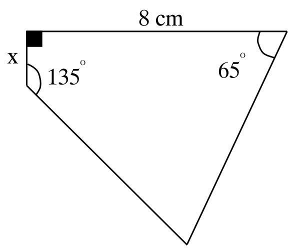
(Α)



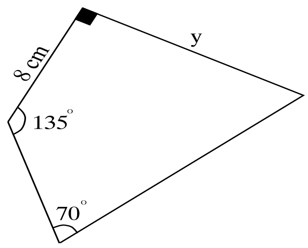
(Β)



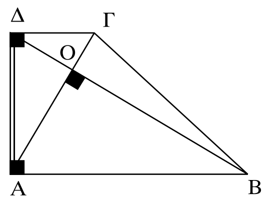
(Γ)



(Δ)



α) Ποιο **δεν** μπορεί να είναι όμοιο με τα υπόλοιπα;
β) Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
γ) Να υπολογίσετε τα μήκη x και y.



11. Στο σχήμα είναι: Α = Δ = 90° και ΑΓ ⊥ ΒΔ.
α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ....Γ....
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
β) Συμπληρώστε τις ισότητες: $\frac{ΒΔ}{\quad} = \frac{\quad}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{\quad}$
γ) Αποδείξτε ότι $ΑΔ^2 = ΑΒ.ΓΔ$

12. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Β - Γ = 90°. Αν ΑΔ το ύψος του, δείξτε ότι: $ΑΔ^2 = ΔΒ.ΔΓ$.

13. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο, δύο διαδοχικές πλευρές του είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τα αντίστοιχα ύψη του.

14. Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν ένα ύψος τους και τις περιέχουσες αυτό πλευρές τους, ανάλογες.

15. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, κάθε παράλληλη ευθεία προς τη διάμεσο ΑΜ, ορίζει στις πλευρές της γωνίας Α τμήματα ανάλογα προς τις πλευρές αυτές.

16. Να αποδείξετε ότι δύο τυχαία ύψη τριγώνου, είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες βάσεις τους.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α.Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και παίρνουμε στις ΑΒ, ΑΓ και ΔΑ τμήματα $\mathrm{AB'} = \frac{\mathrm{AB}}{3}, \mathrm{A\Gamma'} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{3}, \Delta\Delta' = \frac{\mathrm{A}\Delta}{3}$.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο Δ΄Β΄Γ΄ είναι όμοιο προς το ΑΒΓ.

18. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι όμοια.

β) Το γινόμενο ΒΕ.ΔΖ είναι σταθερό και ίσο με το γινόμενο δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου.

19. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως. Αν Ζ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ, αποδείξτε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.

20. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ). Αν η διάμεσος ΜΝ του τραπεζίου τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, αποδείξτε ότι ΔΕ = ΕΒ.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΔ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ν, Ρ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΜΝ}{ΑΔ}=\frac{ΜΒ}{ΒΔ}$

β) $\frac{ΜΡ}{ΑΔ}=\frac{ΜΓ}{ΔΓ}$

γ) ΜΝ + ΜΡ = σταθερό

22. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) φέρνουμε το ύψος ΑΔ και από το Δ φέρνουμε $ΔΕ \perp ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 = ΑΓ.ΔΕ$.

23. Οι βάσεις ενός τραπεζίου έχουν μήκη α και 3α και οι μη παράλληλες πλευρές β και 3β. Αν οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Μ, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφή το σημείο Μ και βάση τη μεγαλύτερη από τις βάσεις του τραπεζίου.

24. Σε δύο κυρτά τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, ΔΆ΄, Α΄Γ΄. Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα είναι όμοια.

<u>Λύση</u>: Γράψτε με τη σωστή σειρά τις παρακάτω προτάσεις για να έχετε τη λύση.

- Επίσης αφού $\frac{ΑΔ}{Α΄Δ΄} = \frac{ΑΓ}{Α΄Γ΄} = \frac{ΓΔ}{Γ΄Δ΄}$, είναι το τρίγωνο ΑΔΓ όμοιο με το τρίγωνο Α΄Δ΄Γ΄, οπότε Δ = Δ΄, $Α_2 = Α΄_2$ και $Γ_2 = Γ΄_2$.
- Τα τετράπλευρα λοιπόν εκτός από τις ανάλογες πλευρές έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.

- Έχουμε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta' A'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$.
- Είναι επομένως όμοια.
- Άρα $A = A'$, $\Gamma' = \Gamma_1$ ως αθροίσματα ίσων γωνιών.
- Αφού $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$, θα είναι το τρίγωνο ΑΒΓ όμοιο με το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄,
  οπότε $B = B'$, $A_1 = A'_1$ και $\Gamma_1 = \Gamma'_1$.