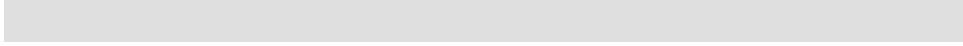


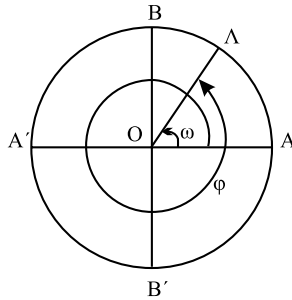
**Β΄**

**Γενική Τριγωνομετρία**



**Γενικευμένη γωνία - Γενικευμένα τόξα - Το ακτίνιο**  
**Τριγωνομετρικός κύκλος - Τριγωνομετρικοί αριθμοί γενικευμένης γωνίας**

1. Η γωνία  $\omega$  του παρακάτω σχήματος είναι θετική.



α) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών:

Στήλη (A)	Στήλη (B)
ΟΛ	αρχική πλευρά της $\omega$
ΟΑ	τελική πλευρά της $\omega$

β) Αν  $\text{AO}\Lambda = \omega$ , συμπληρώστε την ισότητα:

$$\varphi = \dots\dots\dots$$

γ) Συμπληρώστε τις φράσεις:

Η γωνία  $720^\circ + \omega$  έχει αρχική πλευρά την .....

Η γωνία  $-360^\circ + \omega$  έχει τελική πλευρά την .....

2. Στους κύκλους της διπλανής σελίδας έχουν αντιστοιχηθεί:

- κάποιοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και το 0, στον πρώτο
- κάποιοι αρνητικοί αριθμοί και το 0, στο δεύτερο  
 με βάση τη συμφωνία ότι ο αριθμός 1 αντιστοιχεί σε τόξο 1 rad.

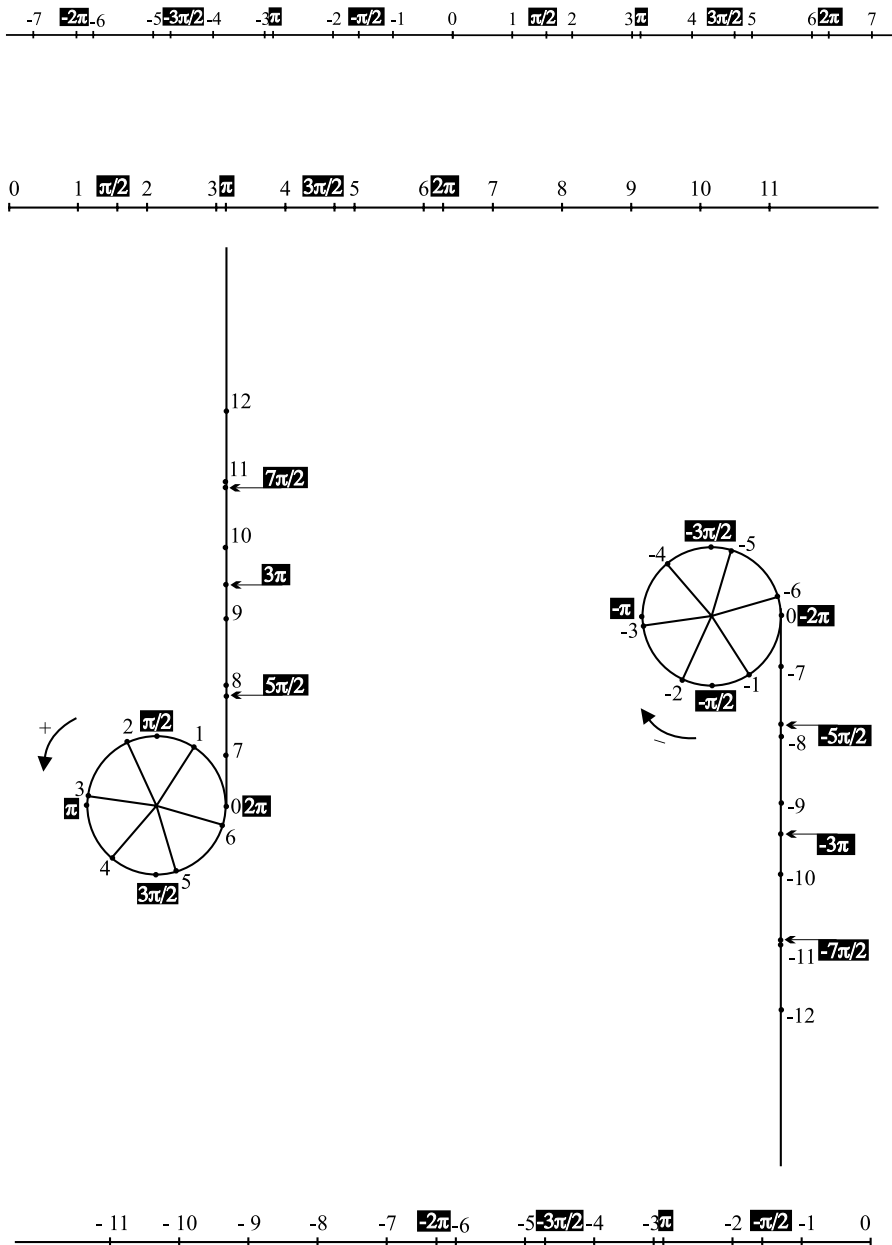
Αν συνεχίσουμε την τοποθέτηση των πραγματικών αριθμών πάνω στους κύκλους αυτούς:

α) Ο 7 θα συμπέσει με τον αριθμό 1; Αν ναι, γιατί;

Αν όχι, θα προηγείται ή θα έπεται του 1 και κατά πόσα ακτίνια;

β) Ο -14 θα συμπέσει με τον αριθμό -2; Αν ναι, γιατί;

Αν όχι, θα προηγείται ή θα έπεται του -2 και κατά πόσα ακτίνια;



3. Χρησιμοποιώντας τον τύπο  $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ , να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Μέτρο γωνίας σε μοίρες	0°	30°	45°			120°		150°	180°		1°
Μέτρο γωνίας σε ακτίνια	0			$\pi/3$	$\pi/2$		$3\pi/4$		$\pi$	1	

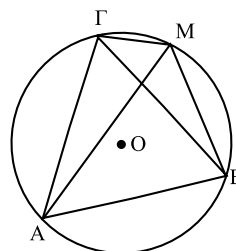
4. Πόσο είναι σε ακτίνια οι γωνίες:
- ενός ισόπλευρου τριγώνου;
  - ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου;

5. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Μέτρο γωνίας σε μοίρες	10°	53°	60°	18°				
Μέτρο γωνίας σε ακτίνια					$2\pi/3$	$\pi/4$	$3\pi/8$	2

6. Εκφράστε σε ακτίνια τις γωνίες A, B και Γ τριγώνου ABΓ:

- όταν  $A = 72^\circ$  και  $B = 18^\circ$ ,
- όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές και  $A = 45^\circ$   
(θα εξετάσετε και τις δύο πιθανές περιπτώσεις).



7. Το τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο. Υπολογίστε σε ακτίνια τις γωνίες AOB, AMB και BMΓ.

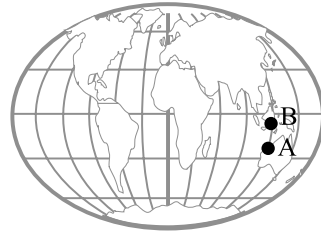
8. Σε τρίγωνο ABΓ είναι  $A = \pi/6$  rad και  $B = 2\pi/6$  rad. Τι είδους τρίγωνο είναι το ABΓ;

9. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και με ακτίνες R και R' αντίστοιχα. Μια γωνία xOy αποκόπτει από τον K ένα τόξο με μήκος 9 και από τον K' ένα τόξο με μήκος 20. Αποδείξτε ότι  $\frac{R'}{R} = \frac{20}{9}$ .

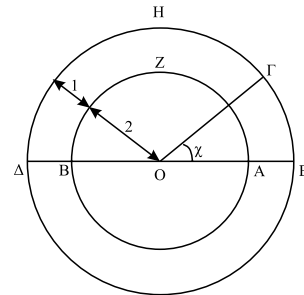
10. Σε κύκλο ακτίνας  $R = 4$ , υπολογίστε το μήκος τόξων που αντιστοιχούν στις γωνίες:

α)  $\alpha = \pi/4$  rad,      β)  $\alpha = 2\pi/3$  rad,      γ)  $\alpha = 36^\circ$

11. Δύο πόλεις A και B νησιών του Ινδικού Ωκεανού βρίσκονται πάνω στον ίδιο Μεσημβρινό και έχουν γεωγραφικό πλάτος  $20,52^\circ$  Νότιο και  $4,38^\circ$  Νότιο αντίστοιχα. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων ακολουθώντας τον Μεσημβρινό του οποίου το συνολικό μήκος είναι 40.000 km.

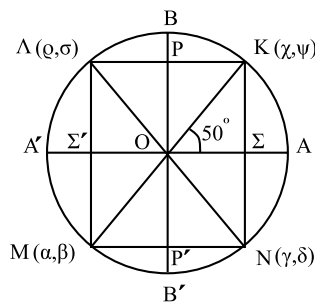


12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι: το τόξο ΓΗΔ του εξωτερικού κύκλου έχει το ίδιο μήκος με το ημικύκλιο ΑΖΒ του εσωτερικού κύκλου. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της γωνίας



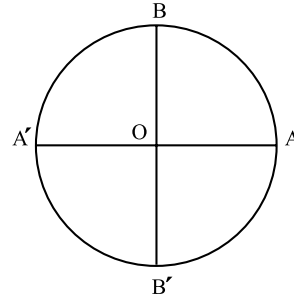
$x = \text{AOG}$  σε rad;

13. Με βάση το παρακάτω σχήμα, συμπληρώστε τον πίνακα:

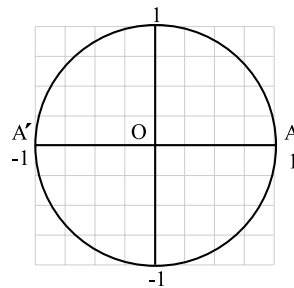


γωνία	τελική πλευρά	μέτρο γωνίας σε μοίρες	ημίτονο γωνίας	συνημίτονο γωνίας
θετική AOK		$50^\circ$	$y = + (OP)$	
θετική AOA				$\rho = - (OS')$
θετική AOM				
Αρνητική AON				

14. α) Τοποθετήστε στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο τη γωνία  $AOA_1 = 25^\circ$  και προσδιορίστε γραφικά το ημίτονο και το συνημίτονό της. Να γίνει το ίδιο για τις γωνίες  $AOA_2 = 76^\circ$ ,  $AOA_3 = 135^\circ$ .

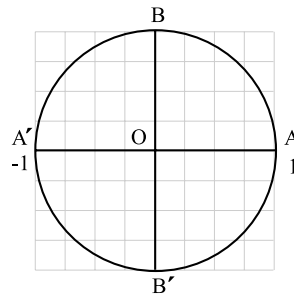


- β) Στον άξονα  $A'O$  προσδιορίστε σημείο Η με τετμημένη 0,75. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε γραφικά τις γωνίες που έχουν συνημίτονο τον αριθμό 0,75. Να προσδιορίσετε γραφικά και τα ημίτονα των γωνιών αυτών.



- γ) Να γίνει ότι και στο (β) για σημείο Κ με τετμημένη 0,50 και για σημείο Λ με τετμημένη - 0,60.

- δ) Στον άξονα  $B'O$  να προσδιορίσετε σημείο Κ με τεταγμένη 0,50. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε γραφικά τις γωνίες που έχουν ημίτονο τον αριθμό 0,50. Να προσδιορίσετε γραφικά και το συνημίτονο των γωνιών αυτών.

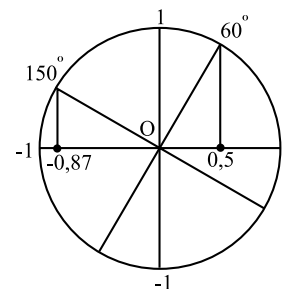


- ε) Να γίνει ότι και στο (δ) για σημείο Ν με τεταγμένη 0,80.

15. Με βάση τα στοιχεία που σημειώνονται στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο και τις απαραίτητες ευθείες που πρέπει να χαράξετε, να βρείτε:

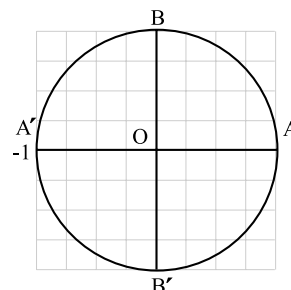
- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| α) $\sin 0^\circ$ | β) $\sin 30^\circ$ |
| $\sin 90^\circ$   | $\sin 120^\circ$   |
| $\sin 180^\circ$  | $\sin 240^\circ$   |
| $\sin 270^\circ$  | $\sin 330^\circ$   |

Δικαιολογήστε την απάντησή σας στο (β) ερώτημα.



16. Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο:

Να σχεδιάσετε τις γωνίες που σημειώνονται στους πίνακες Α, Β, Γ και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τους πίνακες αυτούς.



Πίνακας Α				
γωνία	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
τελική πλευρά	OB			

Πίνακας Β				
γωνία	$\pi/4$	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/4$
τελική πλευρά				

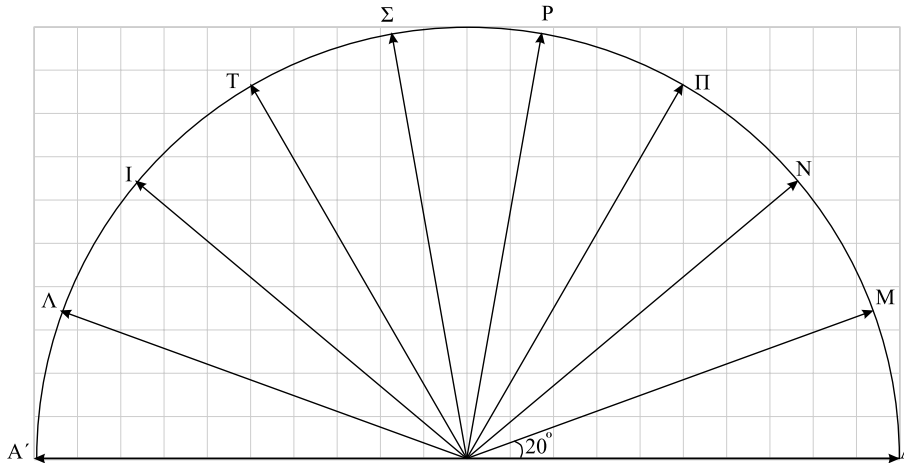
Πίνακας Γ							
γωνία	$\pi/8$	$2\pi/8$	$3\pi/8$	$\pi/2$	.....	$15\pi/8$	$2\pi$
τελική πλευρά							

Τι είδους πολύγωνο ορίζουν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι τελικές πλευρές των γωνιών του Πίνακα Γ;

17. Να γράψετε δύο γωνίες που να έχουν την ίδια αρχική και την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία:  
α)  $60^\circ$ , β)  $-20^\circ$ .
18. Να τοποθετήσετε στον τριγωνομετρικό κύκλο τις γωνίες:  
 $90^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $-240^\circ$ ,  $750^\circ$ ,  $-4\pi/3$  rad,  $-\pi$  rad.
19. Να εξετάσετε αν οι γωνίες  $\varphi = 760^\circ$  και  $\omega = -320^\circ$  έχουν την ίδια τελική πλευρά.

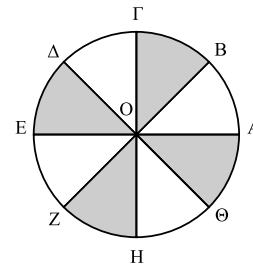


20. Με βάση το παρακάτω σχήμα συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί:



Γωνία	0°	20°	40°	60°	120°	140°	160°	180°
Τελική πλευρά		OM						
Πέρασ αντ. Τόξου			N					
Τετμημένη				0,50				
Τεταγμένη		0,34						

21. Ο διπλανός κυκλικός δίσκος έχει διαιρεθεί σε οκτώ ίσους κυκλικούς τομείς. Να βρείτε σε ακτίνια τα μέτρα των γωνιών: AOB, ZOE, HOB και ZOΘ.

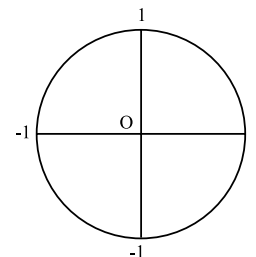


22. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:

α) Να σχεδιάσετε τις γωνίες:  $\pi/3$ ,  $2\pi/3$ ,  $\pi$ ,  $4\pi/3$ ,  $5\pi/3$ ,  $2\pi$ .

β) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;

γ) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;



- δ) Τι είδους πολύγωνο ορίζουν τα σημεία τομής των τελικών πλευρών των γωνιών αυτών με τον τριγωνομετρικό κύκλο;  
 ε) Γράψτε τα μέτρα των γωνιών αυτών σε μοίρες.

23. Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων:

$$x_k = k\pi/3 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχει η συνάρτηση  $\eta\mu x_k$ ; η  $\sigma\upsilon\nu x_k$ ;

24. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:

α) Να σχεδιάσετε τις γωνίες:

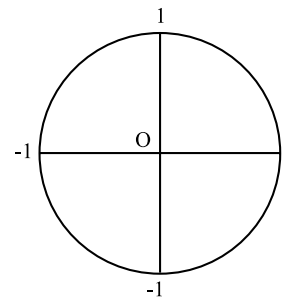
$$\pi/6, 2\pi/6, \dots, 11\pi/6, 2\pi.$$

β) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;

γ) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;

δ) Τι είδους πολύγωνο ορίζουν τα σημεία τομής των τελικών πλευρών των γωνιών αυτών με τον τριγωνομετρικό κύκλο;

ε) Γράψτε τα μέτρα των γωνιών αυτών σε μοίρες.



25. Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων:

$$y_k = k\pi/6 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχει η συνάρτηση  $\sigma\upsilon\nu y_k$ ;

26. Τι είδους πολύγωνο ορίζουν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι τελικές πλευρές των γωνιών  $k\pi/12$  με  $k \in \mathbb{Z}$ ;

27. Το  $\eta\mu\omega$ :

Α. μετριέται με μοίρες

Β. μετριέται με rad

Γ. μετριέται με m

Δ. μετριέται με cm

Ε. δεν μετριέται με καμιά μονάδα

28. Από τις παρακάτω τιμές **δεν μπορεί** να είναι ημίτονο γωνίας:

Α.  $\frac{1}{2}$

Β.  $-\frac{3}{2}$

Γ.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Δ.  $-\frac{1}{2}$

Ε.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29. Αν  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 2$  τότε η γωνία  $x$  ισούται με:  
 Α.  $0^\circ$     Β.  $90^\circ$     Γ.  $180^\circ$     Δ.  $270^\circ$     Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

30. Για οποιαδήποτε γωνία  $x$ :  
 Α.  $\sigma\upsilon\nu x < -1$     Β.  $\sigma\upsilon\nu x > 1$     Γ.  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$   
 Δ. το  $\sigma\upsilon\nu x$  δεν ορίζεται    Ε. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

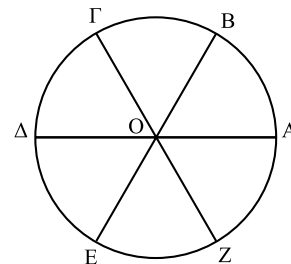
31. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος είναι χωρισμένος σε έξι ίσα τόξα.

α) Να δώσετε σε ακτίνια το μέτρο των γωνιών:

$\text{AOB} = \dots\dots\dots$      $\text{BO}\Delta = \dots\dots\dots$

β) Να δώσετε ένα μέτρο των τόξων:

$\text{AB}$      $\text{B}\Delta$      $\text{E}\Gamma$      $\Delta\text{A}$



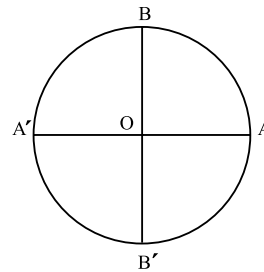
γ) Να προσδιορίσετε το σημείο M του κύκλου στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- i) το τόξο BM να έχει μέτρο  $2\pi/3$
- ii) το τόξο ZM να έχει μέτρο  $-\pi/3 + 8\pi$
- iii) τα τόξα AE και ΓM να έχουν το ίδιο μέτρο.

32. Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος που δείχνει το διπλανό σχήμα.

α) Να γράψετε σε μοίρες δύο γωνίες:

- i) που να έχουν τελική πλευρά την OA ..... ..
- ii) που να έχουν τελική πλευρά την OB ..... ..
- iii) που να έχουν τελική πλευρά την OA' ..... ..
- iv) που να έχουν τελική πλευρά την OB' ..... ..



β) Να γράψετε σε ακτίνια όλες τις γωνίες που έχουν τελική πλευρά την OA, την OB, την OA' και την OB'.

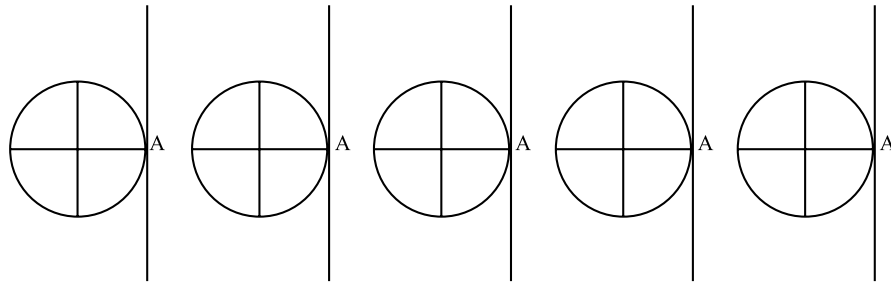
γ) Να γράψετε σε ακτίνια όλες τις γωνίες που να έχουν τελική πλευρά:

- i) την OA ή την OA'
- ii) την OB ή την OB'.

δ) Ποια είναι η τελική πλευρά των γωνιών:

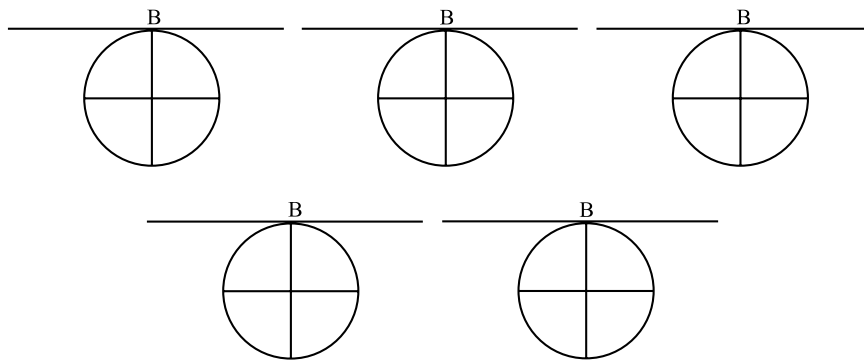
- i)  $2k\pi + 3\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- ii)  $2k\pi - \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

33. α) Στους παρακάτω τριγωνομετρικούς κύκλους έχουν σχεδιαστεί οι άξονες των εφαπτομένων. Να σχεδιάσετε σε καθέναν απ' αυτούς τις εφαπτόμενες των εξής γωνιών:  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $0^\circ$ .



- β) Σε ποιο τεταρτημόριο πρέπει να βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας για να είναι η εφαπτομένη της θετική;

34. α) Στους παρακάτω τριγωνομετρικούς κύκλους έχουν σχεδιαστεί οι άξονες των συνεφαπτομένων. Να σχεδιάσετε σε καθέναν απ' αυτούς τις συνεφαπτόμενες των εξής γωνιών:  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $0^\circ$ .

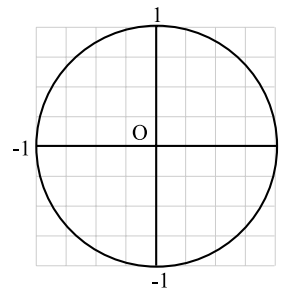


- β) Σε ποιο τεταρτημόριο πρέπει να βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας για να είναι η συνεφαπτομένη της αρνητική;

35. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του διπλανού σχήματος τοποθετήστε τις γωνίες:  $\pi/3$ ,  $2\pi/3$ ,  $\pi$ ,  $4\pi/3$ ,  $5\pi/3$ ,  $2\pi$ .

α) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη;

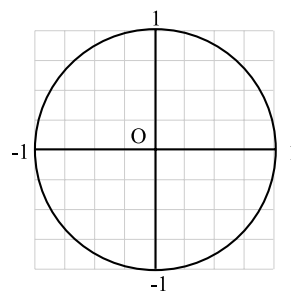
β) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια συνεφαπτομένη;



36. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του διπλανού σχήματος τοποθετήστε τις γωνίες:  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ ,  $3\pi/4$ ,  $\pi$ ,  $5\pi/4$ ,  $3\pi/2$ ,  $7\pi/4$ ,  $2\pi$ .

α) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη;

β) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια συνεφαπτομένη;



**Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών γενικευμένης γωνίας**

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με το πρόσημο (+) ή (-) λαμβάνοντας υπόψη το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

τελική πλευρά γωνίας $\theta$	Τεταρτημόριο			
	1 <sup>ο</sup>	2 <sup>ο</sup>	3 <sup>ο</sup>	4 <sup>ο</sup>
πρόσημο $\eta\mu\theta$				
πρόσημο $\sigma\upsilon\nu\theta$				
πρόσημο $\epsilon\phi\theta$				
πρόσημο $\sigma\phi\theta$				

2. Από τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς είναι θετικός ο:

- Α.  $\eta\mu 200^\circ$    Β.  $\sigma\upsilon\nu 160^\circ$    Γ.  $\sigma\upsilon\nu (-140^\circ)$    Δ.  $\eta\mu (-200^\circ)$    Ε.  $\sigma\upsilon\nu (-240^\circ)$

3. Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $\theta$ .

	τεταρτημόριο τελικής πλευράς
$\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	
$\epsilon\phi\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	
$\sigma\phi\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	
$\epsilon\phi\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	
$\eta\mu\theta < 0$ και $\epsilon\phi\theta < 0$	
$\sigma\phi\theta < 0$ και $\eta\mu\theta > 0$	
$\eta\mu\theta > 0$ και $\epsilon\phi\theta > 0$	
$\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

γωνία $\theta$	πρόσημο $\eta\mu\theta$	πρόσημο $\sigma\upsilon\nu\theta$	πρόσημο $\epsilon\phi\theta$	πρόσημο $\sigma\phi\theta$
$117^\circ$				
$-100^\circ$				
$925^\circ$				
$-40^\circ$				

5. Αν  $\eta\mu\theta < 0$  και  $\epsilon\phi\theta > 0$ , τότε η τελική πλευρά της γωνίας  $\theta$  βρίσκεται:  
**A.** στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο **B.** στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο **Γ.** στο 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο  
**Δ.** στον ημιάξονα  $Ox'$  **Ε.** στο 4<sup>ο</sup> ή 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο
6. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:  
 α)  $\eta\mu 80^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 260^\circ$   
 β)  $\sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \epsilon\phi 310^\circ$   
 γ)  $\eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 100^\circ$   
 δ)  $\epsilon\phi 240^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 320^\circ$
7. Αν  $0 < x < 90^\circ$  βρείτε το πρόσημο της παράστασης  
 $\eta\mu (180^\circ - x) + \epsilon\phi (90^\circ - x) - \sigma\upsilon\nu (270^\circ - x)$ .

8. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω διαφορών:

- α)  $\eta\mu 20^\circ - \eta\mu 23^\circ$
- β)  $\sigma\upsilon\nu 243^\circ - \sigma\upsilon\nu 250^\circ$
- γ)  $\epsilon\phi 200^\circ - \epsilon\phi 190^\circ$
- δ)  $\sigma\phi 72^\circ - \sigma\phi 294^\circ$

9. Αν  $0 < x < 360^\circ$ , τότε η σχέση  $\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$  αληθεύει για:

- A. μια τιμή του x
- B. δύο τιμές του x
- Γ. τρεις τιμές του x
- Δ. τέσσερις τιμές του x
- E. καμία τιμή του x

10. Με μοναδική πληροφορία την τιμή του αριθμού:

$$\pi = 3,14159264\dots$$

να βρείτε το πρόσημο του  $\eta\mu$  και του  $\sigma\upsilon\nu$  των παρακάτω γωνιών:

- α)  $3,1 \text{ rad}$
- β)  $1,58 \text{ rad}$
- γ)  $4,5 \text{ rad}$
- δ)  $31,4 \text{ rad}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**Αξιοσημείωτες γωνίες**

$$30^\circ / \frac{\pi}{6} \quad 45^\circ / \frac{\pi}{4} \quad 60^\circ / \frac{\pi}{3} \quad 90^\circ / \frac{\pi}{2} \quad 180^\circ / \pi \quad 270^\circ / \frac{3\pi}{2} \quad 360^\circ / 2\pi$$

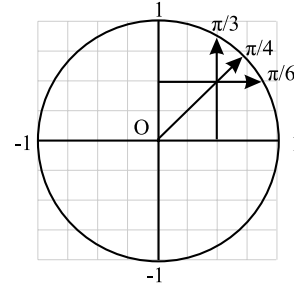
1. Συνδέστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης (A) με ένα στοιχείο της στήλης (B).

Στήλη (A)	Στήλη (B)
$\sigma\upsilon\nu 30^\circ$	$1/2$
$\sigma\upsilon\nu 45^\circ$	$\sqrt{3}/2$
$\epsilon\phi \pi/4$	$0$
$\sigma\phi 60^\circ$	$1$
$\sigma\upsilon\nu \pi/3$	$-\sqrt{3}$
	$\sqrt{3}$
	$\sqrt{3}/3$
	$-1$
	$\sqrt{2}/2$

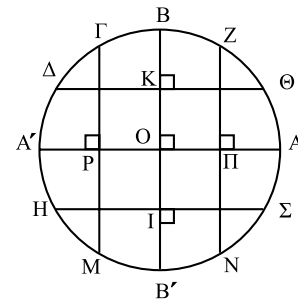
2. Εξηγήστε την κατασκευή στο διπλανό σχήμα.

Πώς προσδιορίστηκαν:

- Το πέρας του τόξου  $\pi/4$ ;
- Το πέρας του τόξου  $\pi/3$ ;
- Το πέρας του τόξου  $\pi/6$ ;
- Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των περάτων των τόξων  $\pi/3$  και  $\pi/6$ ;



3. Στο διπλανό σχήμα γνωρίζοντας ότι Π, Κ, Ρ και Ι είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΑ' και ΟΒ' αντίστοιχα, να βρείτε τα μέτρα των γωνιών: ΑΟΘ, ΑΟΖ, ΑΟΓ, ΑΟΔ, ΑΟΗ, ΑΟΜ, ΑΟΝ, ΑΟΣ. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



4. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\sin^2 0^\circ + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

5. Το  $\eta\mu 0^\circ + \eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ + \eta\mu 90^\circ$  ισούται με:

A.  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

B.  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Γ.  $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{2}$

Δ.  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

E.  $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2}{4}$

6. Η τιμή του γινομένου:  $\sin 0^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \sin 180^\circ \cdot \sin 270^\circ \cdot \sin 360^\circ$  είναι:

A. -1

B. 1

Γ. 0

Δ. 2

E.  $\frac{1}{2}$



7. α) Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που σημειώνονται.

Γωνία θ	0° 0	90° π/2	180° π	270° 3π/2	360° 2π
ημθ	.....	.....	.....	.....	.....
συνθ	.....	.....	.....	.....	.....
εφθ	.....	.....	.....	.....	.....
σφθ	.....	.....	.....	.....	.....

- β) Αντικαταστήστε στον ίδιο πίνακα τις τελείες με το (+) ή με το (-) ανάλογα με το πρόσημο των γωνιών που βρίσκονται μεταξύ των δεδομένων γωνιών.

**Σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων τριγωνομετρικών αριθμών της ίδιας γωνίας**

1. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α) - (στ)

α) $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	β) $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	γ) $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
δ) $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	ε) $\eta\mu\omega = \pm \frac{\epsilon\phi\omega}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	στ) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

να λύσετε τις ασκήσεις που ακολουθούν:

2. Δίνεται:

α)  $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,6$  όπου  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu\theta$ , ii)  $\epsilon\phi\theta$

β)  $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  όπου  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu\theta$ , ii)  $\epsilon\phi\theta$

3. Εάν  $\eta\mu\theta = 0,4$  και  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , υπολογίστε το  $\sigma\upsilon\nu\theta$  και την  $\epsilon\phi\theta$ .
4. Εάν  $\eta\mu\gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}$  και  $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ , υπολογίστε το  $\sigma\upsilon\nu\gamma$  και την  $\epsilon\phi\gamma$ .
5. Εάν  $\epsilon\phi\theta = \frac{8}{15}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$ .
6. Εάν  $\epsilon\phi\theta = -\frac{3}{4}$  και  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ , να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής.
7. Να βρείτε τη γωνία  $\theta$ , αν γνωρίζετε ότι  $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ .
8. Να γίνουν οι πράξεις:  
 α)  $(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2$   
 β)  $(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 - (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2$
9. Αν είναι  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{\epsilon\phi^2\alpha} = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} - 1$ .
10. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις  $x > \frac{2}{3}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  και  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  και συμβαίνει  $\eta\mu\alpha = \sqrt{\frac{3x-2}{3x}}$  και  $\epsilon\phi\beta = \sqrt{\frac{3x-2}{2}}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta$ .
11. Αν  $2\epsilon\phi\theta - 3 = 0$  και  $\eta\mu\theta < 0$ , να βρεθεί το  $\sigma\upsilon\nu\theta$ .
12. Αν  $6\eta\mu^2x + \eta\mu x - 1 = 0$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , να βρεθεί το  $\sigma\upsilon\nu x$ .
13. Αν  $2\sigma\upsilon\nu^2x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$  και  $270^\circ < x < 360^\circ$ , να βρεθεί η  $\epsilon\phi x$ .

14. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ισχύουν:

α)  $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2 \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β)  $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu^2 x - 1$

γ)  $(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 + \eta\mu x)$

δ)  $\frac{1 - \epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

ε)  $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\eta\mu} = \eta\mu x$

στ)  $\eta\mu^2 \alpha (1 + \sigma\phi^2 \alpha) + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha (1 + \epsilon\phi^2 \alpha) = 2$

ζ)  $\frac{\epsilon\phi \alpha + \sigma\phi \beta}{\sigma\phi \alpha + \epsilon\phi \beta} = \frac{\epsilon\phi \alpha}{\epsilon\phi \beta}$

15. Αν  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 1$ , τότε η γωνία  $x$  παίρνει:

**A.** καμία τιμή

**B.** μια τιμή

**Γ.** τρεις τιμές

**Δ.** άπειρες τιμές

**E.** τέσσερις τιμές

16. Αν  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 0$ , τότε η τελική πλευρά της γωνίας  $x$  βρίσκεται:

**A.** στο  $1^\circ$  τεταρτημόριο

**B.** στο  $2^\circ$  τεταρτημόριο

**Γ.** στο  $3^\circ$  τεταρτημόριο

**Δ.** στο  $4^\circ$  τεταρτημόριο

**E.** δεν υπάρχει γωνία  $x$  που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση

17. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις ισχύουν:

α)  $\eta\mu x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \lambda > 1$

β)  $\eta\mu x = \frac{\pi}{4}$

γ)  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\pi}{2}$

δ)  $\eta\mu x = \sqrt{3} - 2$

ε)  $\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt[3]{7}$

στ)  $\eta\mu \alpha = \sqrt[3]{29} - \sqrt{11}$

ζ)  $\eta\mu x = \sqrt{2} - 1$

η)  $\epsilon\phi x = \frac{\pi}{2}$

18. Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , τότε:

- A.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$     B.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < 1$     Γ.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$   
Δ.  $\epsilon\phi x < \eta\mu x$     Ε. κανένα από τα παραπάνω

19. Αν  $\kappa = 2\sigma\upsilon\nu x + 5$ , τότε η μεγαλύτερη τιμή του  $\kappa$  είναι:

- A. 5    B. 3    Γ. -2    Δ. 7    Ε. -7

20. Αν  $45^\circ < x < 90^\circ$ , τότε:

- A.  $\eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x$     B.  $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$     Γ.  $\epsilon\phi x < 1$   
Δ.  $|\eta\mu x| = |\sigma\upsilon\nu x|$     Ε.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < \frac{1}{2}$

21. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο (>), (<) ή (=) στις παρακάτω σχέσεις:

- α)  $\eta\mu 40^\circ \dots \eta\mu 40^\circ \eta\mu 60^\circ$   
β)  $\eta\mu 55^\circ \dots (\eta\mu 55^\circ)^2$   
γ)  $\sigma\upsilon\nu 170^\circ \dots \sigma\upsilon\nu 170^\circ \sigma\upsilon\nu 25^\circ$   
δ)  $\eta\mu 340^\circ \dots \epsilon\phi 340^\circ$   
ε)  $\sigma\upsilon\nu 70^\circ \dots \epsilon\phi 70^\circ$

22. Να δείξετε ότι η ανίσωση  $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 11\sigma\upsilon\nu x + 15 > 0$  αληθεύει για οποιαδήποτε γωνία  $x$ .

23. Βρείτε τα  $x$  και  $y$  αν  $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$  και  $3\eta\mu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(x-y) = 4$ .

24. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παραστάσεων:

- α)  $y = 2 + 3\sigma\upsilon\nu x$   
β)  $y = 5 + \eta\mu^2 x$   
γ)  $y = \frac{1}{2 - \eta\mu x}$

25. Αν  $\varepsilon\phi x = \kappa$ , τότε το  $\frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}$  ισούται με:  
 Α.  $1 + \eta\mu^2 x$    Β.  $\sigma\upsilon\nu^2 x$    Γ.  $\sigma\phi^2 x$    Δ.  $\eta\mu^2 x$    Ε.  $\varepsilon\phi^2 x + 1$
26. Από τις παρακάτω σχέσεις σημειώστε αυτή που **δεν ισχύει πάντοτε** (χρειάζεται περιορισμούς):  
 Α.  $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$    Β.  $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$    Γ.  $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 x}$   
 Δ.  $\eta\mu^2 x = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 x}$    Ε.  $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$
27. Αν  $x_1, x_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  
 $(1 + \eta\mu\phi) x^2 - (1 + \eta\mu^2\phi) x + (1 - \eta\mu\phi) \eta\mu\phi = 0$ ,  $\eta\mu\phi \neq -1$   
 τότε να δείξετε ότι:  $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 1$
28. Να δείξετε ότι αν  $\varepsilon\phi^2 x = 1 + 2\varepsilon\phi^2 y$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu^2 y = 2\sigma\upsilon\nu^2 x$ .
29. Αν  $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2} \eta\mu x$ , τότε και  $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x$ .
30. Αν  $3\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta = 5$ , τότε να δείξετε ότι:  $(3\sigma\upsilon\nu\theta - 5\eta\mu\theta)^2 = 9$ .
31. Αν το  $\eta\mu x = \frac{5}{13}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ , τότε το  $\sigma\upsilon\nu x$  ισούται με:  
 Α.  $-\frac{12}{13}$    Β.  $\frac{12}{13}$    Γ.  $\frac{8}{13}$    Δ.  $-\frac{8}{13}$    Ε.  $\frac{13}{5}$
32. Για οποιαδήποτε γωνία  $x$ , με  $x \neq \kappa\pi$  και  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , η έκφραση  $(\eta\mu 2x)^2$  ισούται με:  
 Α.  $4\eta\mu x^2$    Β.  $\eta\mu^2 2x$    Γ.  $\eta\mu 4x^2$    Δ.  $\eta\mu 4x$    Ε.  $4\eta\mu x$

33. Αν  $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$  και  $y = 3\eta\mu\theta$ , τότε ισχύει:

A.  $x^2 - y^2 = -5$       B.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$       Γ.  $x^2 + y^2 = 13$

Δ.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$       E.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

34. Η παράσταση  $\kappa = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 + (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)^2$  ισούται με:

A. 1      B. 0      Γ. 2      Δ. 4      E.  $\frac{1}{2}$

35. Η παράσταση  $\kappa = \eta\mu^3\chi + \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi$  ισούται με:

A.  $\eta\mu\chi$       B.  $-\eta\mu\chi$       Γ.  $\epsilon\phi^2\chi$       Δ. 0      E. 1

36. Να δείξετε ότι:

α)  $|3\sigma\upsilon\nu\chi + 2\eta\mu\chi| \leq 5$

β)  $|2\eta\mu\chi - 10\sigma\upsilon\nu\chi| \leq 12$