

Προβλήματα

1. Να κατασκευάσετε μια γωνία xAy , γνωρίζοντας ότι:

α) $\text{εφ } xAy = \frac{3}{5}$

β) $\text{συν } xAy = 0,8$

γ) $\text{ημ } xAy = 0,4$

2. Να κατασκευάσετε μια γωνία α° τέτοια ώστε: $\text{εφ } (90^\circ - \alpha) = \frac{4}{7}$.

3. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψος AH έτσι ώστε:

$$\eta\mu B = \frac{1}{3} \text{ και } \epsilon\phi\Gamma = \frac{1}{3}.$$

α) Περιγράψτε την κατασκευή.

β) Υπολογίστε: i) $\eta\mu BAH$, ii) $\text{συν} \Gamma AH$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στο A .

α) Εάν $AB = 3 \text{ m}$ και $A\Gamma = 4 \text{ m}$, υπολογίστε τις γωνίες B και Γ .

β) Εάν $B\Gamma = 37 \text{ m}$ και $B = 25^\circ$, υπολογίστε τις πλευρές AB και $A\Gamma$.

γ) Εάν $AB = 36 \text{ m}$ και $B = 65^\circ$, υπολογίστε τη $B\Gamma$ και την $A\Gamma$.

δ) Εάν $A\Gamma = 35 \text{ m}$ και $\text{συν} \Gamma = \frac{5}{6}$, υπολογίστε:

i) την AB ,

ii) τη $B\Gamma$ και

iii) τη γωνία B .

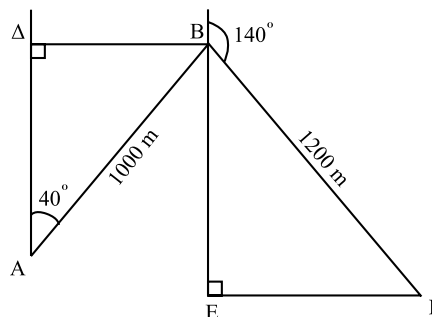
ε) Εάν $B\Gamma = 4,8 \text{ m}$ και $\text{εφ} \Gamma = 0,6$, υπολογίστε:

i) AB ,

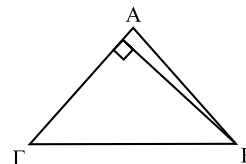
ii) $A\Gamma$ και

iii) τη γωνία B .

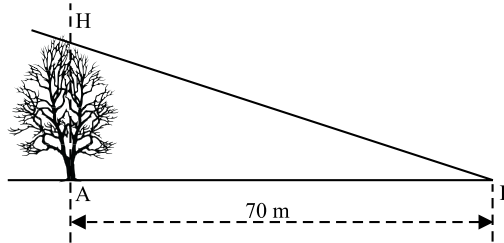
5. Το διπλανό σχήμα παριστάνει κάποιο χώρο ενός πάρκου και δυο δρόμους που ήδη υπάρχουν. Προκειμένου να χαραχθούν και άλλοι δρόμοι, υπολογίστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων: $\Delta\Delta$, ΔB , BE και $E\Gamma$.



6. Δίνεται τρίγωνο $K\Lambda M$ με γωνίες $K = 37^\circ$ και $M = 53^\circ$.
- Τι είδους τρίγωνο είναι το $K\Lambda M$;
 - Γνωρίζοντας ότι $K\Lambda = 25$ m, να υπολογίσετε:
 - την KM και ii) την ΛM .
7. Σε τρίγωνο ΓAB οι πλευρές ΓA , AB και $B\Gamma$ έχουν μήκη 5, 12, 13 αντίστοιχα. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου.
8. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τοποθετήστε τα σημεία $A(2, 4)$, $B(2, -2)$ και $\Gamma(5, -2)$.
- Υπολογίστε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) όπου $A = 84^\circ$ και $AB = 50$ m. Υπολογίστε:
- την πλευρά $B\Gamma$,
 - το ύψος AH .
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) στο οποίο $B\Gamma = 26$ cm και $AB\Gamma = 47^\circ$. Υπολογίστε:
- την πλευρά AB ,
 - το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά $A\Gamma$.

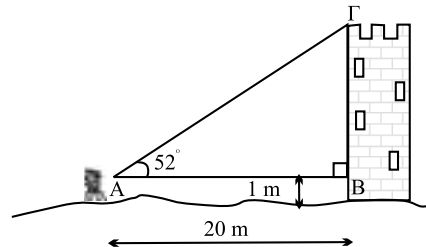


11. Υπολογίστε το ύψος AH του δέντρου της διπλανής εικόνας αν γνωρίζουμε ότι η γωνία των ακτίνων του ήλιου με τον ορίζοντα είναι 18° και ότι η σκιά του δέντρου AG έχει μήκος 70 m.



12. Ένας μηχανικός για να μετρήσει το ύψος ενός πύργου του οποίου η βάση είναι προσπελάσιμη κάνει τα εξής βήματα:

α) Τοποθετείται 20 m μακριά από τον πύργο.



β) Με το θεοδόλιχο βρίσκει τη γωνία που σχηματίζει η οριζόντια διεύθυνση και η ευθεία που συνδέει το θεοδόλιχο με την κορυφή του πύργου· όπως δείχνει το σχήμα η γωνία αυτή είναι 52° .

Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του μηχανικού υπολογίστε το ύψος του πύργου.

13. Δίνεται τρίγωνο ABΓ ορθογώνιο στο A με υποτείνουσα BΓ = 1 m. Έστω AH το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά BΓ.

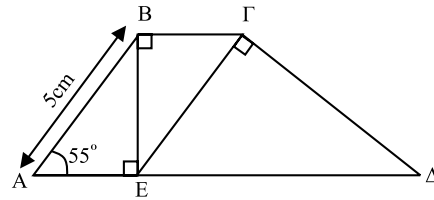
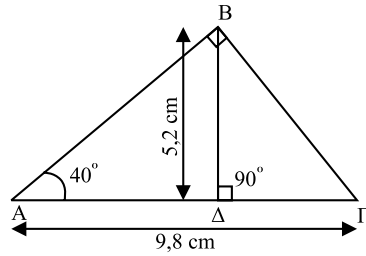
α) Εάν το μέτρο της γωνίας B είναι x, υπολογίστε συναρτήσει του x τα μέτρα των εξής ευθυγράμμων τμημάτων:

i) AH, ii) BH και iii) ΓH

β) Εφαρμόστε τα αποτελέσματα για $x = 28^\circ$:

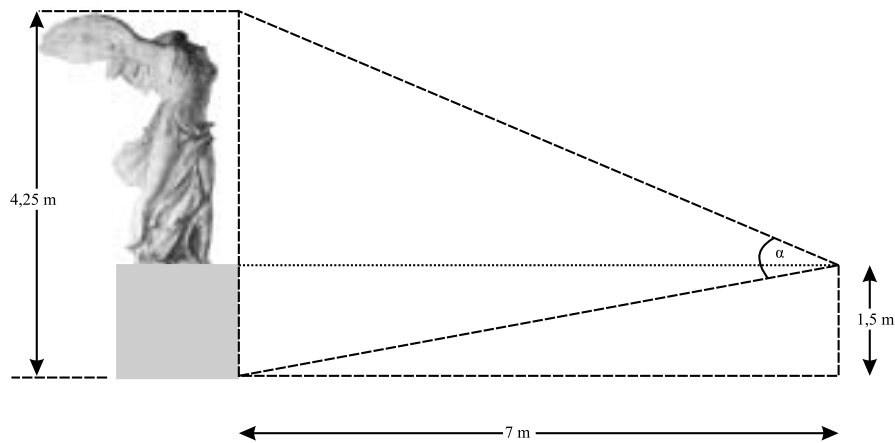
AH = BH = ΓH =

14. Με τα δεδομένα που σημειώνονται στα παρακάτω σχήματα υπολογίστε (χωρίς να χρησιμοποιήσετε το πυθαγόρειο θεώρημα):



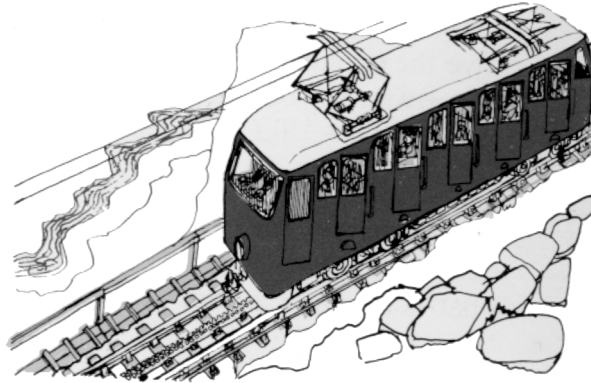
α) i) την $AΔ$, ii) την AB , iii) τη $BΓ$ β) i) την AE , ii) τη γωνία $Δ$, iii) τη $ΓΔ$.

15. Στο Μουσείο του Λούβρου των Παρισίων ένας γλύπτης παρατηρεί και μελετάει το γνωστό ελληνικό άγαλμα η «Νίκη της Σαμοθράκης» ύψους 4,25 m, που βρίσκεται σε απόσταση 7 m από τη θέση του.



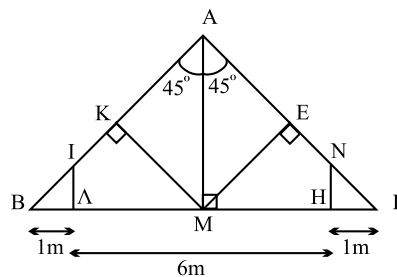
Εάν ο οφθαλμός του βρίσκεται σε ύψος 1,50 m από το δάπεδο της αίθουσας, να βρείτε το μέγεθος της γωνίας υπό την οποία ο γλύπτης βλέπει το άγαλμα.

16. Το τρενάκι της εικόνας που ανεβαίνει στην πλαγιά του βουνού για να κερδίσει 10 m σε ύψος πρέπει να διανύσει 109,5 m. Ζητείται η γωνία κλίσεως της πλαγιάς.

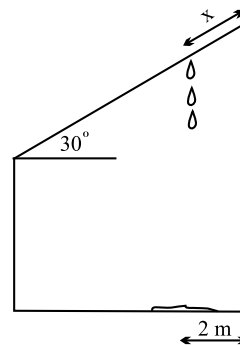


- α) Αποδώστε το πρόβλημα μ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
β) Υπολογίστε τη γωνία κλίσεως της πλαγιάς.

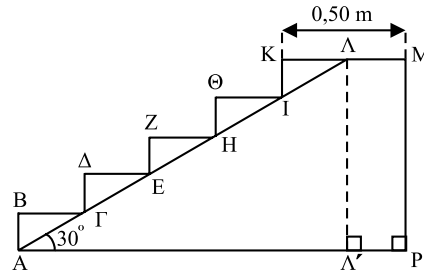
17. Στο σχήμα αποδίδεται η τομή μιας σκεπής. Εάν το σημείο I είναι το μέσο της BK, υπολογίστε τα μήκη των δοκαριών AM, AB, KM και ΙΛ.



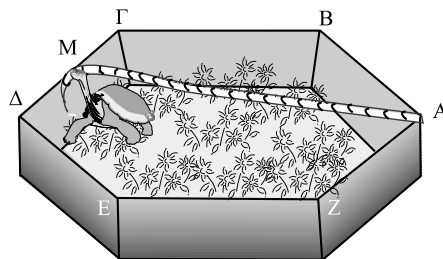
18. Η κεραμοσκεπή ενός δωματίου, που έχει κλίση 30° , έπαθε ζημιά. Μετά από μια καταιγίδα μια κηλίδα νερού εμφανίστηκε στο δάπεδο σε απόσταση 2 m από τον τοίχο. Σε ποια απόσταση από το ψηλότερο σημείο της σκεπής βρίσκεται το σπασμένο κεραμίδι;



19. Στο σχήμα δίνεται η τομή μιας σκάλας. Το σημείο Λ είναι μέσο της απόστασης KM . Υπολογίστε:
- Το μήκος ενός βήματος ($B\Gamma = \Delta E = ZH = \Theta I = K\Lambda$).
 - το πλάτος της σκάλας AP .



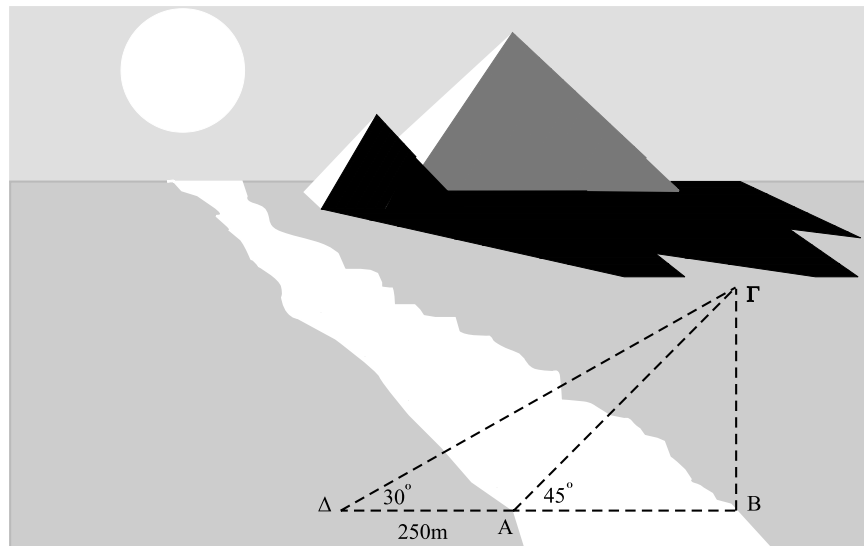
20. Ένας ζωολογικός κήπος έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου πλευράς 2 km. Μια χελώνα βαδίζει κατά μήκος της περιμέτρου του κήπου, διανύει 5 km και σταματάει.



Πόσα km απέχει το σημείο M στο οποίο στέκει η χελώνα από το σημείο A που ξεκίνησε;
(Φτιάξτε το γεωμετρικό σχήμα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα. Υπολογίστε την $A\Gamma$ και στη συνέχεια την AM).

21. Κατασκευάστε ένα κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R και θεωρήστε μια διάμετρό του AB που διαιρεί τον κύκλο σε δύο ημικύκλια. Έστω N το μέσο του ενός ημικυκλίου και H το μέσο της ακτίνας OB . Χαράξτε τη μεσοκάθετο της OB και έστω M το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει το ημικύκλιο που δεν περιέχει το N .
- Υπολογίστε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ANBM$.
 - Χρησιμοποιώντας γνωστές σας τριγωνομετρικές σχέσεις υπολογίστε τις πλευρές του τετραπλεύρου συναρτήσει του R .
 - Υπολογίστε τα HA , HB και HM συναρτήσει του R .
22. Σ' ένα κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R εγγράψτε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).
- Εάν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $BOM = BA\Gamma$.
 - Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2R\eta\mu A$.

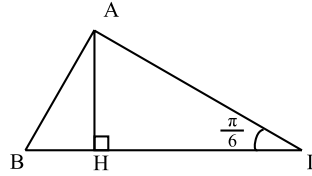
23. Αιγύπτιοι μηχανικοί, για να προσδιορίσουν το πλάτος του ποταμού Νείλου μεταξύ δύο σημείων A και B, προσδιόρισαν με το θεοδόλιχο μια διεύθυνση κάθετη προς την AB και σκόπευσαν πάνω σ' αυτή σημείο Γ έτσι ώστε: η γωνία $BA\Gamma = 45^\circ$. Στη συνέχεια διάνυσαν πάνω στη διεύθυνση BA μια απόσταση $A\Delta = 250$ m και μέτρησαν τη γωνία $A\Delta\Gamma = 30^\circ$. Μ' αυτές τις μετρήσεις που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα, βρήκαν ότι το πλάτος AB του Νείλου είναι 343,66 m.



Βρείτε τους συλλογισμούς με τους οποίους οι μηχανικοί υπολόγισαν το πλάτος του Νείλου. Κλειδί των συλλογισμών αυτών είναι η γωνία των 45° . Γιατί επέλεξαν οι μηχανικοί η γωνία $BA\Gamma$ να είναι 45° ; Δώστε απάντηση σ' αυτό το ερώτημα και χρησιμοποιήστε τη ως αφετηρία των σκέψεών σας.

24. Ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma = a$) η γωνία της κορυφής A έχει σε ακτίνια μέτρο θ . Αποδείξτε ότι η βάση $B\Gamma = 2a\eta\mu\frac{\theta}{2}$.

25. Στο διπλανό σχήμα είναι: $BH = 1$ m και $\Gamma H = 3$ m. Ποια είναι η ακριβής τιμή της περιμέτρου του τριγώνου $AB\Gamma$;



26. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ .
- Χαράζετε το ύψος AH . Υπολογίστε τα $\eta\mu B$ και $\eta\mu\Gamma$ στα τρίγωνα ABH και $A\Gamma H$ αντίστοιχα και συμπεράνατε από αυτά την ισότητα: $\beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu B$.
 - Βρείτε ανάλογη ισότητα χρησιμοποιώντας τα ορθογώνια τρίγωνα που ορίζονται από το ύψος BK .
 - Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα των ερωτημάτων (α) και (β), να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

27. Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OB = OG = 1$ m και $\text{BO}\Gamma = \pi/4$ rad.

- Υπολογίστε την OH και την AH και στη συνέχεια δείξτε ότι:

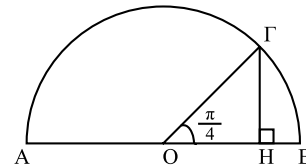
$$\text{συν}BA\Gamma = \frac{2 + \sqrt{2}}{2A\Gamma} \quad (1)$$

- Βρείτε το είδος του τριγώνου $A\Gamma B$ και στη συνέχεια δείξτε ότι:

$$\text{συν}BA\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} \quad (2)$$

- Αποδείξτε ότι: i) $BA\Gamma = \frac{\pi}{8}$ και

$$\text{ii) } \text{συν} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$



28. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στο A και τέτοιο ώστε $B\Gamma = 2\alpha$ και

$$B = \frac{\pi}{8} \text{ rad.}$$

α) Εάν O είναι το μέσο της $B\Gamma$ και AH το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$:

i) Αποδείξτε ότι $\angle AOH = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$

ii) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα δικαιολογήστε γιατί

$$AH = OH = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} .$$

iii) Στη συνέχεια δείξτε ότι: $AB = \alpha\sqrt{2 + \sqrt{2}} .$

β) Με τη βοήθεια του τριγώνου AHB υπολογίστε: το $\sin \frac{\pi}{8}$ και το $\eta\mu \frac{\pi}{8} .$