

# Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α

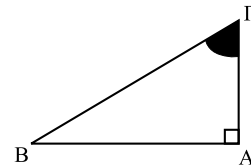
Α΄

Τριγωνομετρικοί αριθμοί  
οξείας γωνίας  
ορθογωνίου τριγώνου



**Τριγωνομετρικοί αριθμοί που συνδέονται με τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου**

1. α) Με βάση το διπλανό σχήμα να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν:



Σωστό    Λάθος

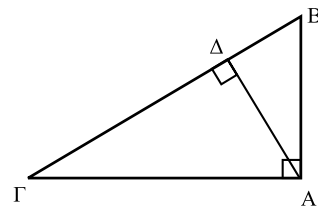
- η ΑΓ είναι η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας Β          
 η ΑΒ είναι η προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας Γ

β) Για το ίδιο σχήμα να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

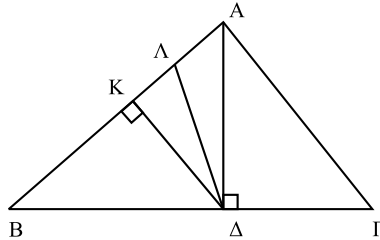
- η ΑΓ είναι η προσκείμενη ..... της οξείας .....  
 - η ΑΒ είναι η απέναντι ..... της οξείας .....

2. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα συνδέστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β):

στήλη (Α)	στήλη (Β)
ημΒ	$\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$
εφΓ	$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$
συνΒ	$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$
ημΓΑΔ	$\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$
σφΔΑΒ	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$
	$\frac{ΔΓ}{ΑΓ}$
	$\frac{ΒΓ}{ΑΔ}$
	$\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$
	$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$



3. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Το  $\sin B$  ισούται με:

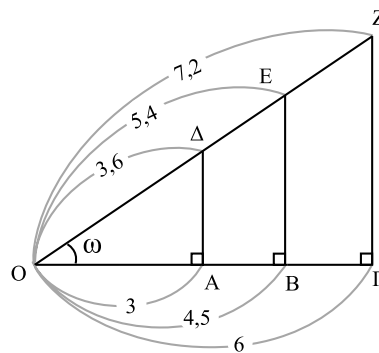
**A.**  $\frac{B\Lambda}{B\Delta}$     **B.**  $\frac{B\Lambda}{B\Gamma}$     **Γ.**  $\frac{BK}{B\Delta}$     **Δ.**  $\frac{B\Delta}{BK}$     **Ε.**  $\frac{B\Lambda}{\Lambda\Delta}$

β) Το  $\eta\mu B$  ισούται με:

**A.**  $\frac{\Delta\Lambda}{B\Delta}$     **B.**  $\frac{A\Delta}{B\Delta}$     **Γ.**  $\frac{A\Delta}{AB}$     **Δ.**  $\frac{\Delta K}{BK}$     **Ε.**  $\frac{B\Lambda}{B\Delta}$

4. Η γωνία  $\omega$ , στο διπλανό σχήμα, ανήκει σε τρία ορθογώνια τρίγωνα: στο ....., στο ..... και στο ..... . Ζητείται το συν $\omega$ .

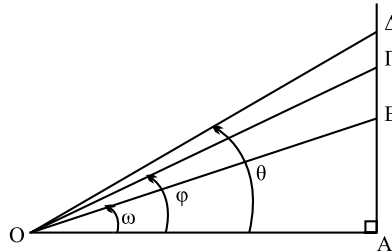
- α) Σε ποιο από τα τρία τρίγωνα θα το υπολογίσετε; .....
- β) Πόσο είναι ακριβώς το συν $\omega$ ;
- γ) Αν επιλέγατε ένα άλλο τρίγωνο για να το υπολογίσετε, το συν $\omega$  θα ήταν ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό που βρήκατε στο (β) ερώτημα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



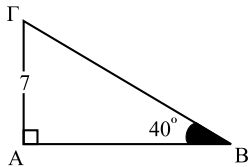
5. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\omega < \varphi < \theta$ .

α) Να βρείτε τους αριθμούς:  $\sin\omega$ ,  $\sin\varphi$ ,  $\sin\theta$ .

β) Να συγκρίνετε τους παραπάνω αριθμούς και να τους διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



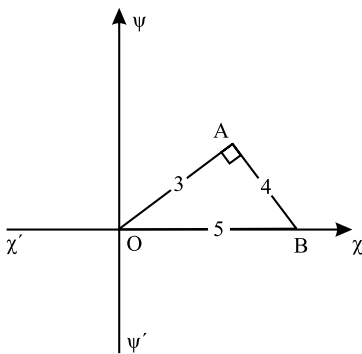
6. Στο παρακάτω σχήμα η υποτείνουσα ισούται με:



- A.  $7 \cdot \sin 40^\circ$     B.  $7 \cdot \eta\mu 40^\circ$     Γ.  $\frac{7}{\sin 40^\circ}$     Δ.  $\frac{7}{\eta\mu 40^\circ}$     E.  $7 \cdot \epsilon\phi 40^\circ$

7. Η κλίση της ευθείας OA του παρακάτω σχήματος είναι:

(κλίση ευθείας: εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ ).

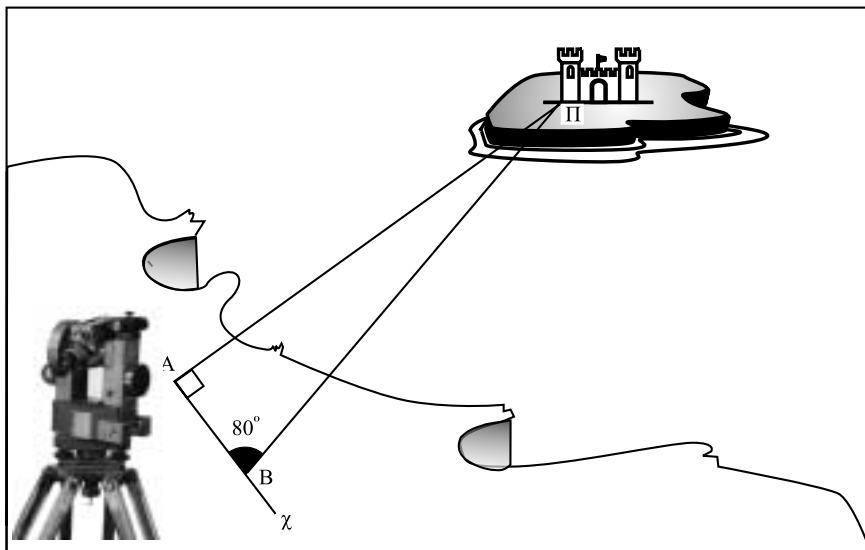


- A.  $\frac{5}{3}$     B.  $\frac{3}{4}$     Γ.  $\frac{4}{3}$     Δ.  $\frac{3}{5}$     E.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1992).

**Σχέσεις μεταξύ των κυρίων στοιχείων του τριγώνου, πλευρών και γωνιών**

1. Ένας τοπογράφος θέλει να μετρήσει την απόσταση ενός πύργου που βρίσκεται σ' ένα νησί από την ακτή:



Στήνει ένα θεοδόλιχο σε κάποιο σημείο A της ακτής. Προσδιορίζει μ' αυτόν δύο διευθύνσεις ΑΠ και Αχ κάθετες μεταξύ τους. Πάνω στη διεύθυνση Αχ διανύει 100 m και φθάνει στο σημείο Β. Μετράει τη γωνία ΑΒΠ και βρίσκει ότι είναι  $80^\circ$ . Στη συνέχεια υπολογίζει:

$$BP = \frac{100}{0,17} = 588,23$$

ΑΠ .....

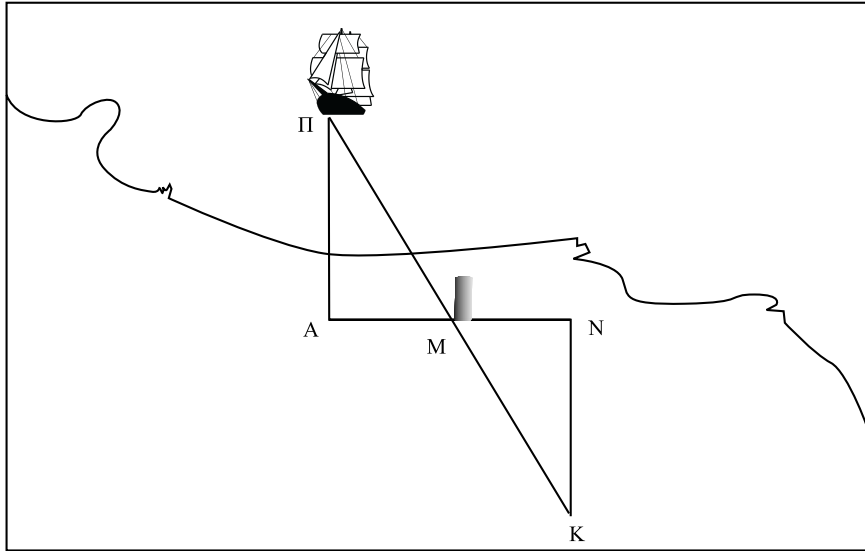
Να ελέγξετε την πορεία των μετρήσεων και των υπολογισμών του μηχανικού.

- α) Γιατί προσδιόρισε δύο κάθετες διευθύνσεις;  
 β) Το πηλίκο  $\frac{100}{0,17}$  ορίζει πράγματι την απόσταση ΒΠ;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- γ) Τι έκανε ο τοπογράφος στη συνέχεια για να βρει την απόσταση ΑΠ του πύργου από την ακτή;

- δ) Ανάλογο πρόβλημα αντιμετώπισε ο Θαλής ο Μιλήσιος θέλοντας να προσδιορίσει την απόσταση ενός πλοίου από την ακτή και το έλυσε γεωμετρικά ως εξής:



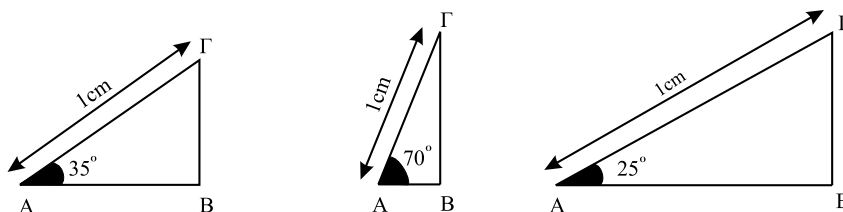
Θεώρησε το τμήμα ΠΑ που είναι ίσο με την απόσταση του πλοίου από την ακτή. Περπάτησε κατά μήκος της ακτής κάθετα προς το ευθύγραμμο τμήμα ΠΑ. Έφτασε σ' ένα σημείο Μ και εκεί στερέωσε στην άμμο έναν πάσσαλο. Συνέχισε να προχωράει στην ίδια διεύθυνση έως ότου να διανύσει μια απόσταση ΜΝ ίση με την ΑΜ. Ξεκινώντας από το Ν και σε διεύθυνση κάθετη προς την ΑΝ προχώρησε προς το εσωτερικό της ξηράς έως ότου έφτασε σε σημείο Κ από το οποίο έβλεπε το πλοίο Π και τον πάσσαλο στο Μ σε ευθεία γραμμή. Βρήκε δε ότι η ζητούμενη απόσταση είναι η ΝΚ.

- i) Συμφωνείτε ότι η ΝΚ είναι ίση με την απόσταση του πλοίου από την ακτή και γιατί;
- ii) Θα μπορούσατε να λύσετε αυτό το πρόβλημα τριγωνομετρικά με το θεοδόλιχο και πώς;
- iii) Ποια από τις δύο μεθόδους μέτρησης είναι ακριβέστερη και γιατί;

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ):

- α) Δίνονται  $B = 32^\circ$  και  $B\Gamma = 6$  m. Υπολογίστε τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$ .  
 β) Δίνονται  $AB = 5$  m και  $B = 41^\circ$ . Υπολογίστε τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$ .  
 γ) Δίνονται  $B\Gamma = 8$  m και  $A\Gamma = 5$  m. Υπολογίστε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών.

3. Δίνονται τα σχήματα:



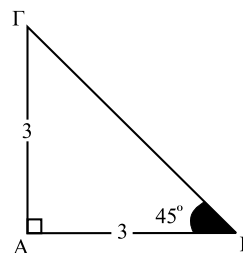
Κάνοντας τις απαραίτητες μετρήσεις (προσέξτε την κλίμακα των σχεδίων) να συμπληρώσετε τον πίνακα:

γωνία $\theta$	$35^\circ$	$70^\circ$	$25^\circ$
συν $\theta$			
ημ $\theta$			

**Τριγωνομετρικοί αριθμοί των αξιοσημείωτων γωνιών  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$**

1. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετες πλευρές 3 cm. Να υπολογίσετε:

- α) την υποτείνουσά του  
 β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των  $45^\circ$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

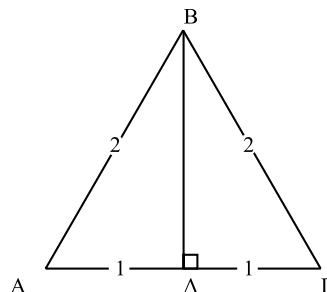


ημ $45^\circ$	συν $45^\circ$	εφ $45^\circ$	σφ $45^\circ$



2. Στο διπλανό σχήμα να εντοπίσετε γωνίες:  
α)  $60^\circ$  και β)  $30^\circ$ .

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και να συμπληρώσετε τον πίνακα.



γωνία $\alpha$	$30^\circ$	$60^\circ$
ημα		
συνα		
εφα		
σφα		

3. Επαληθεύστε τις ισότητες:

α)  $\text{συν}60^\circ = \text{συν}^2 30^\circ - \eta\mu^2 30^\circ$

β)  $\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \cdot \text{συν} 30^\circ$

γ)  $\text{συν} 60^\circ = 2\text{συν}^2 30^\circ - 1$

δ)  $\text{συν} 60^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 30^\circ$

4. Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των  $30^\circ$  και  $45^\circ$  επαληθεύστε ότι:

α)  $\eta\mu 15^\circ = \eta\mu 45^\circ \text{συν} 30^\circ - \text{συν} 45^\circ \eta\mu 30^\circ$

β)  $\eta\mu 75^\circ = \eta\mu 45^\circ \text{συν} 30^\circ + \text{συν} 45^\circ \eta\mu 30^\circ$

Σ' όλους τους υπολογισμούς να γίνεται χρήση των τετραγωνικών ριζών.

5. Επαληθεύστε τις παρακάτω ανισότητες:

α)  $2\eta\mu 30^\circ \neq \eta\mu 60^\circ$

β)  $2\text{συν} 45^\circ \neq \text{συν} 90^\circ$

γ)  $3\eta\mu 15^\circ \neq \text{συν} 45^\circ$

δ)  $\frac{1}{2} \text{συν} 60^\circ \neq \text{συν} 30^\circ$

6. Να δειχθεί ότι:  $\frac{\eta\mu 45^\circ - \eta\mu 3^\circ}{\text{συν} 45^\circ + \text{συν} 60^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων τριγωνομετρικών αριθμών της ίδιας οξείας γωνίας**

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α) - (στ), να λύσετε τις ασκήσεις που ακολουθούν:

α) $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	β) $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	γ) $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
δ) $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2\omega}}$	ε) $\eta\mu\omega = \frac{\epsilon\phi\omega}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2\omega}}$	στ) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°):

α) Δίνεται  $\sigma\upsilon\nu B = 0,6$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu B$ , ii)  $\epsilon\phi B$ .

β) Δίνεται  $\eta\mu B = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Υπολογίστε: i)  $\sigma\upsilon\nu B$ , ii)  $\epsilon\phi B$ .

γ) Δίνεται  $\epsilon\phi B = \frac{8}{15}$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu B$ , ii)  $\sigma\upsilon\nu B$ , iii)  $\sigma\phi B$

2. Αποδείξτε ότι:  $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ .

3. Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

α)  $\epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^3 x$

γ)  $\sqrt{1-\eta\mu x} \cdot \sqrt{1+\eta\mu x}$

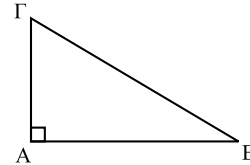
4. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

α)  $\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x - \eta\mu^2 x}$

β)  $\frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y}$

**Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών δύο συμπληρωματικών γωνιών**

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ )
- α) Για τις οξείες γωνίες του Β και Γ αποδείξτε ότι:
- i)  $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$  ii)  $\epsilon\phi\Gamma = \sigma\phi B$



- β) Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, συμπληρώστε τις ισότητες:
- $\eta\mu\Gamma = \dots\dots\dots$
- $\epsilon\phi B = \dots\dots\dots$

2. Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν ζεύγη συμπληρωματικών γωνιών.

	A	B	Γ	Δ	E
γωνία θ	0	30°	45°	60°	90°
ημθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται
σφθ	δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- α) Σημειώστε τα ζεύγη αυτά:  $\dots\dots + \dots\dots = 90^\circ$  κ.λπ.
- β) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία της στήλης Α και της στήλης Ε, γράφοντας τις αντίστοιχες ισότητες.  $\eta\mu 0^\circ = \sigma\upsilon\nu 90^\circ$ ,  $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$  κ.λπ.
- γ) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία της στήλης Β και της στήλης Δ, γράφοντας τις αντίστοιχες ισότητες.

3. Να συμπληρώσετε τις στήλες του παρακάτω πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που λείπουν:

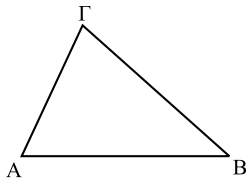
x (μοίρες)	ημx°	εφx°	σφx°	συνx°
0	0,000 0	0,000	δεν ορίζεται	1,000 0
1	0,017 5	0,017 5	57,290	0,999 8
2	0,034 9	0,034 9	28,636	0,999 4
3	0,052 3	0,052 4	19,081	0,998 6
4	0,069 8	0,069 9	14,301	0,997 6
5	0,087 2	0,087 5	11,430	0,996 2
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3
15	0,258 8	0,267 9	3,732 1	0,965 9
16	0,275 6	0,286 7	3,487 4	0,961 3
17	0,292 4	0,305 7	3,270 9	0,956 3
18	0,309 0	0,324 9	3,077 7	0,951 1
19	0,325 6	0,344 3	2,904 2	0,945 5
20	0,342 0	0,364 0	2,747 5	0,939 7
21	0,358 4	0,383 9	2,605 1	0,933 6
22	0,374 6	0,404 0	2,475 1	0,927 2
23	0,390 7	0,424 5	2,355 9	0,920 5
24	0,406 7	0,445 2	2,246 0	0,913 5
25	0,422 6	0,466 3	2,144 5	0,906 3
26	0,438 4	0,487 7	2,050 3	0,898 8
27	0,454 0	0,509 5	1,962 6	0,891 0
28	0,469 5	0,531 7	1,880 7	0,882 9
29	0,484 8	0,554 3	1,804 1	0,874 6
30	0,500 0	0,577 4	1,732 1	0,866 0
31	0,515 0	0,600 9	1,664 3	0,857 2
32	0,529 9	0,624 9	1,600 3	0,848 0
33	0,544 6	0,649 4	1,539 9	0,838 7
34	0,559 2	0,674 5	1,482 6	0,829 0
35	0,573 6	0,700 2	1,428 2	0,819 2
36	0,587 8	0,726 5	1,376 4	0,809 0
37	0,601 8	0,753 6	1,327 0	0,798 6
38	0,615 7	0,781 3	1,279 9	0,788 0
39	0,629 3	0,809 8	1,234 9	0,777 1
40	0,642 8	0,839 1	1,191 8	0,766 0
41	0,656 1	0,869 3	1,151 8	0,756 0
42	0,669 1	0,900 4	1,110 6	0,743 1
43	0,682 0	0,932 5	1,072 4	0,731 4
44	0,694 7	0,965 7	1,035 5	0,719 3
45	0,707 1	1,000 0	1,000 0	0,707 1
46	0,720		0,965 7	0,695
47	0,731		0,932 5	0,682
48	0,743		0,900 4	0,669
49	0,755		0,869 3	0,656
50	0,766		0,839 1	0,643
51	0,777	1,235		0,629
52	0,788	1,280		0,616
53	0,799	1,327		0,602
54		1,376		0,588
55		1,428	0,700 2	0,574
56		1,483	0,674 5	0,559
57		1,540	0,649 4	
58		1,600	0,624 9	
59	0,857	1,664	0,600 9	
60	0,866	1,732	0,577 4	

4. Αν  $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$  και  $\eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$  να βρείτε:

α) το  $\sigma\upsilon\nu 15^\circ$

β) την  $\epsilon\phi 15^\circ$

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.



α) Χαρακτηρίστε με Σ ή Λ τις σχέσεις:

**Σωστό**   **Λάθος**

i)  $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}$

ii)  $\epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B+\Gamma}{2}$

β) Αποδείξτε ότι:

i)  $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$

ii)  $\epsilon\phi \frac{A+B}{2} = \sigma\phi \frac{\Gamma}{2}$

γ) Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του (β) ερωτήματος, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

i)  $\eta\mu \frac{A}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}$

ii)  $\epsilon\phi \frac{A}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{B+\Gamma}{2}$

iii)  $\eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B+\Gamma}{2}$