

Συμπεράσματα από την ανάλυση συχνοτήτων στη Γεωμετρία Α' Λυκείου

Για το 1^ο θέμα που αφορά τη θεωρία:

Η μεγάλη πλειοψηφία των διδασκόντων (73,5%) δεν επιλέγει ως ερώτημα την διατύπωση ορισμών εκ μέρους των μαθητών. Οι μαθητές όταν το συναντήσουν ως ερώτημα το απαντούν σε συντριπτικά μεγάλο ποσοστό (96,6%) ενώ σχεδόν οι μισοί (54,6%) είναι αλάνθαστοι. Τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται στην διατύπωση των ορισμών του παραλληλογράμμου (11,3%) και του ρόμβου (11,8%).

Επίσης οι διδάσκοντες δεν επιλέγουν ως ερώτημα την διατύπωση των κριτηρίων των ευθυγράμμων σχημάτων (76,6%). Οι μαθητές όταν το συναντήσουν ως ερώτημα το απαντούν επίσης σε συντριπτικά μεγάλο ποσοστό (96,7%) αλλά εδώ το ποσοστό των αλάνθαστων μειώνεται αισθητά αφού ούτε ένας στους τέσσερις κατορθώνει να δώσει σωστή απάντηση (22,9%). Τα κυριότερα λάθη σημειώνονται στη διατύπωση των κριτηρίων ώστε ένα τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο με το εντυπωσιακό 30,5% , στο πότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος (8,1%) , πότε ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος (22,9%) και πότε ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο (11%).

Η διατύπωση των ιδιοτήτων των ευθυγράμμων σχημάτων αποφεύγεται ως θέμα σε ακόμη μεγαλύτερο ποσοστό (80,1%) από τους διδάσκοντες. Οι μαθητές επίσης το απαντούν σε πολύ μεγάλο ποσοστό που δεν φθάνει όμως τα προηγούμενα ερωτήματα (89,4%). Από αυτούς αλάνθαστοι είναι πάλι σχεδόν οι μισοί (52,5%) , ενώ τα κυριότερα λάθη παρατηρούνται στη διατύπωση των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου (5,6%) , του ισοσκελούς τραπεζίου (17,3%) και του συνδυασμού αυτών (3,9%).

Παρατηρείται αισθητή διαφοροποίηση εκ μέρους των διδασκόντων στην επιλογή των σχέσεων μεταξύ ευθυγράμμων σχημάτων ως ερώτημα αφού το επιλέγουν ως ερώτημα σχεδόν τέσσερις στους δέκα (42,8%). Από την πλευρά των μαθητών το ποσοστό που δεν απαντά είναι ελαφρά αυξημένο σε σχέση με το αμέσως προηγούμενο (το ποσοστό που απαντά είναι 88%). Οι μαθητές απαντούν αλάνθαστα σε αξιοπρόσεκτο βαθμό (64,3%) ενώ ως προς τα κυριότερα λάθη παρατηρείται μία διασπορά σε σχετικά ευρεία έκταση (σχέση εγγεγραμμένης με αντίστοιχη επίκεντρη 2,1% , σχετικές θέσεις δύο κύκλων 2,3% , σχέση εξωτερικής με άθροισμα απέναντι γωνιών 2,9% , σχέση διαμέσου τραπεζίου με τις βάσεις 5,7% , άθροισμα γωνιών κυρτού $n - \gamma$ ώνου 3,4% , σχέση γωνίας υπό χορδής και εφαπτομένης με αντίστοιχη επίκεντρη 2,3% , ενώ τα μη συστηματικά λάθη εμφανίζονται με άξιο αναφοράς ποσοστό 2,1%).

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα η συντριπτική πλειοψηφία των διδασκόντων επιλέγει την απόδειξη ενός θεωρήματος ως ερώτημα (96,7%). Ο ένας στους τέσσερις μαθητές δεν απαντά ένα τέτοιο ερώτημα (24,9%). Από όσους το απαντούν ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό (40,6%) είναι αλάνθαστοι , ενώ τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται στην απόδειξη της διχοτόμησης των διαγωνίων του παραλληλογράμμου (3%) , της σχέσης της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα με αυτήν (8,3%) και της ιδιότητας του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου (5,2%).

Οι εκπαιδευτικοί αποφεύγουν επίσης σε πολύ υψηλό ποσοστό (82,9%) την διατύπωση ερωτήματος που να αποτελεί εφαρμογή του προηγούμενου ερωτήματος. Το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι δεν απαντούν ένα τέτοιο ερώτημα είναι χαμηλό (12,3%). Αλάνθαστα απαντά το 63% των μαθητών αλάνθαστοι , ενώ τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται στους τομείς σωστή εφαρμογή – λάθος αποτέλεσμα (3,2%) , λάθος εφαρμογή (5,8%) , μη χρήση θεωρήματος (11,7%) και μη συστηματικά λάθη (3,9%).

Ως προς τις ερωτήσεις κατανόησης (ερωτήσεις σωστού λάθους , πολλαπλής επιλογής , αντιστοίχισης κ.λ.π.) , οι διδάσκοντες τις επιλέγουν ως θέμα σε ποσοστό 62,8% ενώ πρόκειται για το πλέον αγαπημένο θέμα των μαθητών αφού μόλις το 1,2% δεν απαντά σε ένα τέτοιο ερώτημα. Σε αντίθεση όμως με το αναμενόμενο, μόνο ένας στους δύο μαθητές απαντά αλάνθαστα σε ένα τέτοιο θέμα (51,6%). Το ποσοστό των μαθητών των οποίων ο αριθμός των σωστών απαντήσεων είναι μικρότερος του 25% είναι 2,8% , αυτών με σωστές απαντήσεις μεταξύ 25% και 50% είναι 24% , μεταξύ 51% και 75% είναι 18,3% , περισσότερο από 75% είναι 8,9% , ενώ απαντά τελείως λάθος (0%) το 3,2% των μαθητών.

Τα ευρήματα από την καταγραφή των δεδομένων που αφορούν την κατασκευή σχήματος είναι τα εξής:

Λάθος σχήμα με χρήση γεωμετρικών οργάνων κατασκευάζει το 14,1% των μαθητών , λάθος σχήμα χωρίς χρήση οργάνων το 17,8% , αλάνθαστο σχήμα με χρήση οργάνων το 48,8% , αλάνθαστο χωρίς χρήση οργάνων το 7% , ενώ δεν κατασκευάζει σχήμα το 12,2% των μαθητών.

Οι μαθητές κάνουν χρήση περιττών στοιχείων σε ποσοστό 32% στις απαντήσεις τους , δεν περιλαμβάνουν περιττά στοιχεία σε ποσοστό 57,8% , ενώ 10,2% αυτών δεν απαντά καθόλου στο θέμα.

Τέλος , αναπόδεικτα συμπεράσματα χρησιμοποιεί το 36,7% των μαθητών εκ των οποίων ποσοστό 14,8% είναι σωστά και 21,9% λάθος , δεν χρησιμοποιεί το 52,6% , ενώ δεν απαντά το 10,7% των μαθητών.

Για τα 2^ο , 3^ο και 4^ο θέματα που αφορούν τις ασκήσεις:

Η μεγάλη πλειοψηφία των διδασκόντων (71,6% για το 3^ο θέμα και 76,5% για το 4^ο) επιλέγει θέμα το οποίο στηρίζεται στη σύγκριση τριγώνων προφανώς λόγω της εξοικείωσης των μαθητών με το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο , ενώ επιλέγεται από το 57,7% για το 2^ο . Οι μαθητές όταν το συναντήσουν ως ερώτημα το απαντούν σε ποσοστό 80,9% για το 2^ο , 78,1% για το 3^ο και 70,7% για το 4^ο θέμα. Τα ποσοστά των μαθητών οι οποίοι είναι αλάνθαστοι είναι σχεδόν ταυτόσημα (42,9% για το 2^ο , 42,8% για το 3^ο και 41,9% για το 4^ο). Τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται στο ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν ότι πρόκειται για σύγκριση δύο τριγώνων (5,4% για το 2^ο , 3% για το 3^ο θέμα) , συγκρίνουν λάθος τρίγωνα (7,3% για το 2^ο , 4,8% για το 3^ο) κατασκευάζουν λάθος την απόσταση σημείου από ευθεία (5,8% για το 3^ο , 2,2% για το 4^ο) , δεν χρησιμοποιούν στο ισοσκελές την ισότητα των πλευρών (2,8% για το 4^ο) , και την ισότητα των γωνιών (4,6% για το 2^ο , 1,6% για το 3^ο και 4,2% για το 4^ο θέμα) , ενώ τα μη συστηματικά λάθη ανέρχονται σε 2,7% για το 2^ο , 3,3% για το 3^ο και 3,2% για το 4^ο .

Επίσης οι διδάσκοντες επιλέγουν ως ερώτημα θέμα που να στηρίζεται σε παραλληλία – καθετότητα ευθειών και σχέσεις γωνιών σε τρίγωνο σε ποσοστά 67,1% για το 2^ο , 66,8% για το 3^ο και 76,6% για το 4^ο θέμα. Οι μαθητές όταν το συναντήσουν ως ερώτημα το απαντούν επίσης σε μεγάλο ποσοστό (83,4% για το 2^ο , 80,1% για το 3^ο και 75,3% για το 4^ο θέμα) αλλά εδώ το ποσοστό των αλάνθαστων μειώνεται στο 3^ο και 4^ο θέματα (44,4% για το 2^ο , 36,5% για το 3^ο και 30,8% για το 4^ο). Τα κυριότερα λάθη σημειώνονται στη μη χρήση του αθροίσματος γωνιών τριγώνου (7,3% για το 2^ο , 5% για το 3^ο και 3,9% για το 4^ο) , στη λάθος χρήση των σχέσεων μεταξύ γωνιών στην παραλληλία ευθειών (7,5% για το 2^ο , 5,3% για το 3^ο και 6,3% για το 4^ο) , στην ιδιότητα του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου (11,1% για το 2^ο , 7,7% για το 3^ο και 12,9% για το 4^ο) , στην μη κατανόηση ότι κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες (5% για το 3^ο και 6,4% για το 4^ο) , ενώ τα συστηματικά λάθη είναι της τάξης του 3,3% για το 2^ο , 1,5% για το 3^ο και 2,8% για το 4^ο θέμα.

Ερωτήματα που αφορούν στα παραλληλόγραμμα ενώ αποφεύγονται ως ζητήματα στο 2^ο και 3^ο θέμα (72,8% και 69% αντίστοιχα) , αντίθετα επιλέγονται στο 4^ο θέμα (60,2%) από τους διδάσκοντες. Οι μαθητές το απαντούν σε μεγάλο ποσοστό (84,8% για το 2^ο , 86,6% για το 3^ο) ενώ το απαντούν σε μικρότερο ποσοστό όταν το συναντούν στο 4^ο θέμα (71,7%). Από αυτούς αλάνθαστοι είναι το 43% για το 2^ο θέμα , το 42,1% για το 3^ο και 27,5% για το 4^ο. Παρατηρείται δηλαδή μία αισθητή διαφοροποίηση ως προς την αντιμετώπιση του 4^{ου} θέματος. Τα κυριότερα λάθη παρατηρούνται στη μη κατανόηση ότι τα μισά των διαγωνίων ορθογωνίου είναι ίσα (5,4% για το 3^ο θέμα) , εάν δύο πλευρές τετραπλεύρου είναι ίσες και παράλληλες τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο (7% για το 2^ο , 9,7% για το 3^ο και 9,8% για το 4^ο) , εάν σε τετράπλευρο οι διαγώνιοι διχοτομούνται τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο (6,6% για το 2^ο) , του συνδυασμού των δύο ανωτέρω (12,2% για το 3^ο) , διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται (5,4% για το 4^ο) , του συνδυασμού αυτού και του δεύτερου ανωτέρω αναφερθέντος (5,4% για το 3^ο) , σε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές ίσες (3,3% για το 2^ο) , σε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές παράλληλες (3,1% για το 4^ο) , στο τετράγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες (3,3% για το 2^ο) , εάν σε τετράπλευρο 3 γωνίες είναι ορθές τότε αυτό είναι ορθογώνιο (3% για

το 4^ο) και τέλος εάν σε παραλληλόγραμμο δύο πλευρές είναι ίσες τότε αυτό είναι ρόμβος (6,6% για το 2^ο).

Παρατηρείται σχετικά μεγάλη απόρριψη εκ μέρους των διδασκόντων, θεμάτων τα οποία στηρίζονται στην ιδιότητα της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου η οποία αντιστοιχεί στην υποτεινούσα και στις ιδιότητες ορθογωνίου τριγώνου με γωνία 30 μοιρών όσον αφορά τα 2^ο και 3^ο θέματα (69,7% και 72,5%) αντίστοιχα, ενώ αντιθέτων αυτά επιλέγονται από το 57,2% των εκπαιδευτικών ως ερωτήματα που αφορούν το 4^ο θέμα. Από την πλευρά των μαθητών το ποσοστό που δεν απαντά είναι 17,6% για το 2^ο, 21,1% για το 3^ο και 23,2% για το 4^ο θέμα. Οι μαθητές απαντούν αλάνθαστα σε ποσοστά 45,2% για το 2^ο, 36,8% για το 3^ο και 34% για το 4^ο θέμα, ενώ ως προς τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται κυρίως στη μη εφαρμογή της ιδιότητας της διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα (11,4% για το 2^ο, 12,1% για το 3^ο και 24,7% για το 4^ο θέμα) και στην μη εφαρμογή των ιδιοτήτων ορθογωνίου τριγώνου με γωνία 30 μοιρών (9,2% για το 2^ο, 15,4% για το 3^ο και 5,8% για το 4^ο θέμα), ενώ τα μη συστηματικά λάθη ανέρχονται σε 3,3% για το 2^ο, 4,5% για το 3^ο και αμελητέο ποσοστό για το 4^ο θέμα..

Η μεγάλη πλειοψηφία των διδασκόντων δεν επιλέγει θέματα βασισμένα στα θεωρήματα του κύκλου και των εγγράμμων τετραπλεύρων (83,3% για το 2^ο, 76,4% για το 3^ο και 86,9% για το 4^ο θέμα). Οι μαθητές δεν απαντούν ένα τέτοιο ερώτημα σε ποσοστά 16% για το 2^ο, 26,4% για το 3^ο και 28,8% για το 4^ο θέμα. Από όσους το απαντούν αλάνθαστο είναι το 36% για το 2^ο, το 30,3% για το 3^ο και το 23,7% για το 4^ο, ενώ τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται στην μη κατανόηση ότι εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή, (2% για το 2^ο και 5,2% για το 3^ο), εάν σε τετράπλευρο μία πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες τότε αυτό είναι εγγράμμο (11,9% για το 4^ο), η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη (2% για το 2^ο, 2,8% για το 3^ο), γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη (2,7% για το 2^ο, 5,7% για το 3^ο και 9,3% για το 4^ο), εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα (12% για το 2^ο), σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα (7,5% για το 3^ο), ακτίνες ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες (5,7% για το 3^ο), ενώ τα μη συστηματικά λάθη ανέρχονται σε 10% για το 2^ο, 4,2% για το 3^ο και αμελητέο ποσοστό για το 4^ο θέμα.

Οι εκπαιδευτικοί αποφεύγουν επίσης σε υψηλό ποσοστό την επιλογή θεμάτων βασισμένα στα τραπέζια όσον αφορά τα 2^ο και 3^ο θέματα (72,9% για το 2^ο και 76,8% για το 3^ο), ενώ τα προτιμούν ως επιλογή για το 4^ο θέμα σε ποσοστό 60,4%. Το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι δεν απαντούν ένα τέτοιο ερώτημα είναι χαμηλό όσον αφορά τα 2^ο και 3^ο θέματα (19,3% και 10,1% για το 2^ο και 3^ο αντίστοιχα) ενώ στο 4^ο θέμα το ποσοστό των μαθητών αυτών αυξάνεται εντυπωσιακά (28,2%). Αλάνθαστα απαντούν οι μαθητές σε ποσοστά 42% για το 2^ο, 38,9% για το 3^ο και 31,7% για το 4^ο θέμα. Τα κυριότερα λάθη εντοπίζονται στη μη χρήση των παραλλήλων πλευρών του τραπέζιου (7,8% για το 2^ο, 19,2% για το 3^ο και 4,8% για το 4^ο), στη μη αναγνώριση δημιουργίας ορθογωνίου τριγώνου όταν φέρουν το ύψος (15,9% για το 3^ο), στη μη χρήση του τύπου και της ιδιότητας της διαμέσου τραπέζιου (5,8% για το 2^ο και 5,4% για το 4^ο) και στη μη αναγνώριση της ισότητας των μη παράλληλων πλευρών ισοσκελούς τραπέζιου (7% για το 2^ο).

Ως προς τα ερωτήματα που αφορούν τη χρήση κριτηρίων ευθυγράμμων σχημάτων, οι διδάσκοντες τα επιλέγουν ως θέμα σε ποσοστό 38,6% για το 2^ο, 50,1% για το 3^ο και 76,9% για το 4^ο θέμα. Οι μαθητές απαντούν ένα τέτοιο ερώτημα σε ποσοστά 85,6% για το 2^ο, 87,1% για το 3^ο και 74,8% για το 4^ο θέμα. Από αυτούς αλάνθαστα απαντά το 42,4% για το 2^ο, το 45,1% για το 3^ο και μόλις το 26,8% για το 4^ο θέμα. Τα κυριότερα λάθη εμφανίζονται στο πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο (8,6% για το 2^ο, 12,9% για το 3^ο και 9,6% για το 4^ο), ορθογώνιο (3,2% για το 2^ο, 6,4% για το 4^ο), ρόμβος (4,9% για το 2^ο, 4,1% για το 4^ο), τραπέζιο (3,2% για το 2^ο, 1,1% για το 3^ο, 3,9% για το 4^ο), ισοσκελές τραπέζιο (2,9% για το 2^ο, 0,4% για το 3^ο, 1,2% για το 4^ο), συνδυασμός των δύο τελευταίων (5,1% για το 3^ο), εγγράμμο (3,2% για το 4^ο), πότε ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο (5,2% για το 2^ο, 1,6% για το 4^ο), ισοσκελές (2,9% για το 2^ο, 13,8% για το 3^ο, 1,4% για το 4^ο), ενώ τα μη συστηματικά λάθη είναι 7,2% για το 2^ο, 3,8% για το 3^ο και 2% για το 4^ο θέμα.

Ως προς τα ερωτήματα που αφορούν τη χρήση κριτηρίων ισότητας τριγώνων, οι διδάσκοντες τα επιλέγουν ως θέμα σε ποσοστό 36% για το 2^ο, 41,6% για το 3^ο και 30% για το 4^ο θέμα. Οι μαθητές απαντούν ένα τέτοιο ερώτημα σε ποσοστό 82% για το 2^ο, 86,1% για το 3^ο και 91,8% για το 4^ο θέμα.

Αλάνθαστα απαντά το 43,7% για το 2^ο , το 49,2% για το 3^ο και το 44,2% για το 4^ο . Η συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων αφορά το κριτήριο πλευρά – γωνία – πλευρά και τα λάθη που παρατηρούνται στην εφαρμογή του καταγράφονται σε ποσοστά 29,7% για το 2^ο , 30 , 2% για το 3^ο και 43,9% για το 4^ο θέμα.

Τα ευρήματα από την καταγραφή των δεδομένων που αφορούν την κατασκευή σχήματος είναι τα εξής:

Λάθος σχήμα με χρήση γεωμετρικών οργάνων κατασκευάζει το 17,7% για το 2^ο , το 16,8% για το 3^ο και το 17,3% των μαθητών για το 4^ο , λάθος σχήμα χωρίς χρήση οργάνων το 14,3% για το 2^ο , το 14% για το 3^ο και το 12,2% για το 4^ο , αλάνθαστο σχήμα με χρήση οργάνων το 39,2% για το 2^ο , το 40,3% για το 3^ο και το 33,2% για το 4^ο , αλάνθαστο χωρίς χρήση οργάνων το 3,9% για το 2^ο , το 4,7% για το 3^ο και το 2,8% για το 4^ο , το σχήμα δίνεται σε ένα ποσοστό 20,4% για το 2^ο , 19,8% για το 3^ο και 26,9% για το 4^ο , ενώ δεν κατασκευάζει σχήμα το 4,6% για το 2^ο , το 4,3% για το 3^ο και το 7,6% των μαθητών για το 4^ο θέμα.

Οι μαθητές κάνουν χρήση περιττών στοιχείων σε ποσοστό 37,9% για το 2^ο , 40,3% για το 3^ο και 40,6% για το 4^ο στις απαντήσεις τους , δεν περιλαμβάνουν περιττά στοιχεία σε ποσοστό 52,3% για το 2^ο , 48,9% για το 3^ο και 43% για το 4^ο , ενώ 9,8% για το 2^ο , 10,8% για το 3^ο και 16,4% για το 4^ο αυτών δεν απαντά καθόλου στο θέμα.

Τέλος , αναπόδεικτα συμπεράσματα χρησιμοποιεί το 43% για το 2^ο , 48,2% για το 3^ο και 49% για το 4^ο των μαθητών εκ των οποίων ποσοστό 13,8% για το 2^ο , 16,4% για το 3^ο και 17,4% για το 4^ο είναι σωστά ενώ 29,2% για το 2^ο , 31,8% για το 3^ο και 31,6% για το 4^ο είναι λάθος , δεν χρησιμοποιεί αναπόδεικτα συμπεράσματα το 46,9% για το 2^ο , το 40,6% για το 3^ο και το 34,4% για το 4^ο , ενώ τέλος δεν απαντά το 10,1% των μαθητών για το 2^ο , το 11,1% για το 3^ο και το 16,6% για το 4^ο.

Έρευνα για τα λάθη των μαθητών στα Μαθηματικά Γυμνασίου.

Ο αριθμός των γραπτών που χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της έρευνας είναι 840. Οι 15 διακριτές περιπτώσεις που περιγράφονται είναι αποτέλεσμα μελέτης των γραπτών αυτών, του προγράμματος σπουδών του Π.Ι, αλλά και της σχετικής βιβλιογραφίας που περιλαμβάνεται στην Αναφορά. Όπως είναι κατανοητό δεν καλύπτουν τις τεράστιες πτυχές του θέματος, εξυπηρετούν όμως μια πρώτη προσέγγιση, αφού αποτελούν ένα πρώτο ουσιαστικό βήμα στην κατεύθυνση αυτή.

Κύριος στόχος της όλης προσπάθειας είναι η μαθηματική εκπαίδευση να βρει ή τουλάχιστον να προσεγγίσει το παιδαγωγικό μοντέλο που σε γενικές γραμμές θα εξασφαλίζει:

- τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για τη μελέτη σε βάθος πρώτον των ίδιων των μαθηματικών και δεύτερον των άλλων επιστημών που διαθεματικά μπορούν να συσχετιστούν με τα μαθηματικά
- τις δεξιότητες και μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για να αντιμετωπιστούν ανάγκες της καθημερινής ζωής έτσι ώστε να μπορούν να επιλυθούν προβλήματα, να αξιολογηθούν και να επιβεβαιωθούν ή να απορριφθούν υποθέσεις
- την ποιότητα και ποσότητα των γνώσεων, των ικανοτήτων και των δεξιοτήτων που είναι απαραίτητες για να εξασφαλιστεί η ισότιμη συμμετοχή στη μαθηματική εκπαίδευση παιδιών από διαφορετικό πολιτισμικό και κοινωνικό περιβάλλον.

Απώτερος στόχος και σκοπός της έρευνας είναι σε δεύτερο χρονικό επίπεδο να γίνει μια προσπάθεια αξιολόγησης των ίδιων των θεμάτων και των παραμέτρων που χρειάζονται ιδιαίτερη διερεύνηση. Να σημειωθεί εδώ ότι από τις 15 μεταβλητές, οι 5 αφορούν ένα πολύ μικρό ποσοστό του δείγματος, συγκεκριμένου τύπου σχολείου και θα παρατεθούν ξεχωριστά στο τέλος της Αναφοράς, με το σκεπτικό να προσανατολιστεί ένα

κομμάτι της έρευνας σε τέτοιες ιδιαίτερες περιπτώσεις όταν τα υπόλοιπα συμπεράσματα αποτιμηθούν, εκτιμηθούν και μπορούν να συγκριθούν για εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων ακόμη και σε ξεχωριστά κλαδιά του δέντρου της εκπαίδευσης.

Οι παραπάνω περιπτώσεις έχουν κωδικοποιηθεί σαν μεταβλητές στο πρόγραμμα SPSS και όλα τα στατιστικά στοιχεία που θα αναφέρονται στο εξής θα είναι αποτέλεσμα της επεξεργασίας των δεδομένων, που επιτυγχάνεται με το στατιστικό αυτό πρόγραμμα.

Τις 10 κατηγορίες – μεταβλητές μπορούμε να τις διαχωρίσουμε σε 2 ομάδες, ανάλογα με τα λάθη που ανιχνεύονται:

- A. Θεωρητικού περιεχομένου, όπου οι μεταβλητές εστιάζονται στους ορισμούς εννοιών του εκάστοτε θεωρητικού αντικειμένου, με ένα εύρος 10 – 30 τιμών η κάθε μία.
- B. Ασκήσεων, όπου οι τιμές των μεταβλητών εστιάζονται στις επιμέρους παραμέτρους που συνθέτουν τα θέματα – ασκήσεις.

A. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

Το Θεωρητικού περιεχομένου κομμάτι της έρευνας καλύπτουν 5 μεταβλητές που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αναλυτικά και αφορούν τα εξής θεωρητικά πεδία:

1. Δυνάμεις.
2. Πυθαγόρειο Θεώρημα.
3. Τριγωνομετρικούς αριθμούς.
4. Ανάλογα – Αντιστρόφως Ανάλογα ποσά.
5. Εγγεγραμμένες γωνίες - Πολύγωνα

Πίνακας1 - ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Έγκυρο ο		Συχνότητ α	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ	7	,8	3,3	3,3
2	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΩΣΤΗ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΛΑΘΟΣ	1	,1	,5	3,8
3	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΛΑΘΟΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΩΣΤΗ	4	,5	1,9	5,7
4	ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΑΡΤΙΟ ΕΚΘΕΤΗ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΒΑΣΗ	1	,1	,5	6,2
5	ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΚΘΕΤΗ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΒΑΣΗ	2	,2	,9	7,1
6	ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΕΚΘΕΤΗ	7	,8	3,3	10,4
7	ΔΕΝ ΓΡΑΦΕΙ ΤΟ $1=\alpha$ ΣΤΗ ΜΗΛΕΝΙΚΗ	17	2,0	8,1	18,5
8	ΠΟΤΕ 2 ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΝΟΜΑΖΟΝΤΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ	7	,8	3,3	21,8
9	ΠΩΣ ΠΟΛ/ΜΕ ΔΥΟ ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΥΣ	2	,2	,9	22,7
10	ΑΝ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΧΟΥΝ $S<0$ & $P<0$ ΠΟΙΟ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ	3	,4	1,4	24,2
11	8-9-10	19	2,3	9,0	33,2
12	α ΣΤΗ ΜΗΛΕΝΙΚΗ	2	,2	,9	34,1
13	6-12	6	,7	2,8	37,0
14	ΑΔΥΝΑΜΙΑ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ	8	1,0	3,8	40,8
15	ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ	5	,6	2,4	43,1
16	ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ .ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ	2	,2	,9	44,1
17	8-15-16	6	,7	2,8	46,9
18	8-16	3	,4	1,4	48,3
19	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	31	3,7	14,7	63,0
20	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	78	9,3	37,0	100,0
	Σύνολο	211	25,1	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	412	49,0		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	217	25,8		
	Σύνολο	629	74,9		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Παρατηρούμε από τον Πίνακα1 ότι οι δυνάμεις είναι σε μεγάλο ποσοστό (51%) επιλογή των διδασκόντων σαν θέμα θεωρίας. Οι επιλογές των μαθητών επίσης συμπεριφέρονται ομαλά , αφού το επιλέγει το 25,1% και το «προσπερνά» το 25,8%. Από τους μαθητές που δουλεύουν με τις δυνάμεις ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό 14,7% δείχνει να έχει ελλιπή γνώση του αντικειμένου, ένα άλλο ποσοστό της τάξης του 48,3% κάνει λάθη σε αρκετές περιπτώσεις που θα συζητήσουμε παρακάτω και ένα σημαντικό ποσοστό 37% είναι αλάνθαστο.

Σχολιάζοντας τις διακριτές περιπτώσεις που ανιχνεύονται από τα γραπτά των μαθητών του δείγματος, παρατηρούμε:

1^{ov}) Λάθη σε ορισμούς - διατυπώσεις με μία αξιοπρόσεκτα ισοδύναμη συχνότητα της τάξης του 3,3%:

- α) στην διατύπωση του ορισμού της δύναμης.
- β) στον ορισμό των αντίστροφων αριθμών.
- γ) στην δύναμη σε αρνητικό εκθέτη.

2^{ον}) Διαφοροποίηση ποσοστών στην αντιμετώπιση σχετικών θεμάτων όπως:

α) στην περίπτωση των ιδιοτήτων των δυνάμεων, όπου ενώ έχουμε αδυναμία διατύπωσης σε ποσοστό 3,8%, το ποσοστό του λάθους γίνεται 2,4% όταν οι μαθητές συμπληρώνουν τις ιδιότητες των δυνάμεων.

β) στην περίπτωση που έχουμε διατύπωση ορισμού και εφαρμογή. Σωστή διατύπωση – λάθος εφαρμογή ελάχιστο ποσοστό 0,5% ενώ λάθος διατύπωση – σωστή εφαρμογή 1,9%.

γ) στις συνδυαζόμενες περιπτώσεις,

- αντίστροφοι αριθμοί ΚΑΙ πως πολλαπλασιάζουμε ετερόσημους ΚΑΙ ποιο είναι το πρόσημο 2 αριθμών όταν ξέρουμε το άθροισμα και το γινόμενο τους με 9%
- αντίστροφοι αριθμοί ΚΑΙ συμπλήρωση αντίστοιχων ιδιοτήτων δυνάμεων ΚΑΙ υπολογισμός γινομένου πολλών παραγόντων με 2,8%

3^{ον}) Παρόμοια ποσοστά όταν έχουμε συνδυαζόμενες περιπτώσεις :

α) δύναμη σε αρνητικό εκθέτη ΚΑΙ α στη μηδενική με 2,8%.

β) αντίστροφοι αριθμοί ΚΑΙ συμπλήρωση αντίστοιχων ιδιοτήτων δυνάμεων ΚΑΙ υπολογισμός γινομένου πολλών παραγόντων με 2,8%.

4^{ον}) Το σημαντικό ποσοστό 8,1% στην περίπτωση του $1 = a^0$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις που καταγράφονται στο δείγμα μας, φαίνονται στον Πίνακα1 και δεν σχολιάζονται, θα κατηγοριοποιηθούν σε δεύτερο επίπεδο για παραπέρα μελέτη και προβληματισμό.

Πίνακας2 - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ Π.Θ	13	1,5	7,5	7,5
2	ΣΧΕΣΗ ΠΛΕΥΡΩΝ	14	1,7	8,0	15,5
3	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ Π.Θ	40	4,8	23,0	38,5
4	1-3	8	1,0	4,6	43,1
5	ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΙ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΜΕ ΚΕΦΑΛΑΙΑ	1	,1	,6	43,7
6	1-2	4	,5	2,3	46,0
7	ΕΛΛΗΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	23	2,7	13,2	59,2
8	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	71	8,5	40,8	100,0
	Σύνολο	174	20,7	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	620	73,8		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	44	5,2		
	Missing	2	,2		
	Σύνολο	666	79,3		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Παρατηρούμε από τον Πίνακα2 ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι σε σχετικά μέτριο ποσοστό (25,9%) επιλογή των διδασκόντων σαν θέμα θεωρίας. Οι επιλογές των μαθητών δείχνουν σαφή προτίμηση, αφού το επιλέγει το 20,7% και το αφήνει μόλις το 5,2% όταν το βρίσκει σαν θέμα θεωρίας. Παρόλα αυτά, από τους μαθητές που το επιλέγουν το 13,2% έχει ελλιπή γνώση του αντικειμένου, ένα άλλο ποσοστό της τάξης του 46% κάνει λάθη σε αρκετές περιπτώσεις που θα συζητήσουμε παρακάτω και ένα σημαντικό ποσοστό 40,8% είναι αλάνθαστο.

Το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος είναι το σημείο που συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ποσοστό αποτυχίας με 23%, ενώ η διατύπωσή του και η σχέση των πλευρών έχουν παραπλήσιες τιμές 7,5% και 8% αντίστοιχα. Σημαντική είναι η παρατήρηση ότι όπου υπάρχει θέμα που απαιτεί ΚΑΙ τις δύο παραπάνω συνιστώσες το ποσοστό είναι 2,3%, όπως επίσης και στον συνδυασμό με την διατύπωση του Π.Θ. ΚΑΙ του αντιστρόφου του το ποσοστό βρίσκεται στο 4,6%.

Πίνακας3 - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Έγκυρο		Συχνότητα α	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	22	2,6	9,5	9,5
2	ΣΧΕΣΗ ΓΩΝΙΩΝ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	42	5,0	18,2	27,7
3	ΜΕΓΙΣΤΗ-ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.	9	1,1	3,9	31,6
4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΗΜ45 - ΣΥΝ45	11	1,3	4,8	36,4
5	ΣΩΣΤΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΛΑΘΟΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗ	9	1,1	3,9	40,3
6	2 - 3	2	,2	,9	41,1
7	1 - 2	8	1,0	3,5	44,6
8	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	29	3,5	12,6	57,1
9	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	99	11,8	42,9	100,0
	Σύνολο	231	27,5	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	306	36,4		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	303	36,1		
	Σύνολο	609	72,5		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Σε μία ανάγνωση του Πίνακα3 βλέπουμε την σαφέστατη προτίμηση των διδασκόντων στους Τριγωνομετρικούς αριθμούς (63,6%) σαν θέμα θεωρίας. Οι επιλογές των μαθητών δείχνουν άλλη προτίμηση, αφού το επιλέγει το 27,5% και το αποφεύγει το 36,1%. Παρόλα αυτά το 12,6% έχει ελλιπή γνώση του αντικειμένου, ένα άλλο ποσοστό της τάξης του 44,6% κάνει λάθη σε αρκετές περιπτώσεις που θα συζητήσουμε παρακάτω και ένα σημαντικό ποσοστό 42,9% είναι αλάνθαστο.

Η σχέση Γωνιών και Τριγωνομετρικών Αριθμών φαίνεται να είναι το μεγάλο πρόβλημα στην μαθητική κοινότητα αφού το ποσοστό λάθους αγγίζει το 18,2% σχεδόν ο ένας στους τέσσερις. Σημαντικό ποσοστό 9,5% κάνει λάθος στους ορισμούς και το 4,8% αποτυγχάνει στους υπολογισμούς των ημ45-συν45. Στους συνδυασμούς τιμών που προσεγγίστηκαν έχουμε δυσκολία μάλλον αναμενόμενη 3,5% στον ορισμό ΚΑΙ την σχέση γωνιών – τριγ. αριθμών, αλλά σχεδόν αμελητέα τιμή στον συνδυασμό σχέση γωνιών – τριγ. αριθμών ΚΑΙ μέγιστη - ελάχιστη τιμή τριγ. αριθμών. Αξιοσημείωτη τέλος, είναι και η λάθος εφαρμογή των σωστών ορισμών από το 3,9% του δείγματος.

Πίνακας4 - ΑΝΑΛΟΓΑ-ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Έγκυρο		Συχνότητ α	%	Έγκυρο %	Αθροιστικ ό %
1	ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ	5	,6	5,2	5,2
2	ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ	7	,8	7,3	12,5
3	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ	5	,6	5,2	17,7
4	ΠΕΡΝΑΕΙ ΑΠ ΤΗΝ ΑΡΧΗ Η $\Psi = AX$ ΚΑΙ ΓΙΑΤΙ?	4	,5	4,2	21,9
5	ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ	3	,4	3,1	25,0
6	ΓΙΑΤΙ Η $\Psi = A/X$ ΤΕΜΝΕΙ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ	22	2,6	22,9	47,9
7	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $\Psi = AX+B$ ΣΕ ΣΧΕΣΗ $\Psi = AX$	1	,1	1,0	49,0
8	1 - 4	2	,2	2,1	51,0
9	Η $\Psi = AX$ ΕΙΝΑΙ ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ	2	,2	2,1	53,1
10	5 - 9 \wedge Σχέση αντιστρόφως ανάλογων \wedge Γραφική παράσταση αντιστρόφως ανάλογων	1	,1	1,0	54,2
11	5 - 9 \wedge Σχέση αντιστρόφως ανάλογων	1	,1	1,0	55,2
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	13	1,5	13,5	68,8
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	30	3,6	31,3	100,0
	Σύνολο	96	11,4	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	652	77,6		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	92	11,0		
	Σύνολο	744	88,6		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Παρατηρούμε από τον Πίνακα4 ότι τα θέματα που σχετίζονται με τα Ανάλογα – Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά είναι σε σχετικά μικρό ποσοστό (22,4%) επιλογή των διδασκόντων. Οι επιλογές των μαθητών δείχνουν μοιρασμένες, αφού το επιλέγει το 11,4% και το αφήνει το 11% όταν το βρίσκει σαν θέμα θεωρίας. Από τους μαθητές που το επιλέγουν το 13,5% έχει ελλιπή γνώση του αντικειμένου, ένα μεγάλο ποσοστό της τάξης του 55,2% κάνει λάθη σε αρκετές περιπτώσεις και ένα ποσοστό 31,3% είναι αλάνθαστο.

Όπως ίσως αναμενόταν το λάθος που βρίσκεται στην υψηλότερη βαθμίδα, είναι η εξήγηση του γιατί η $\Psi = A/X$ τέμνει τους άξονες με 22,9%. Παρατηρούμε μία ισορροπία 5,2% στον ορισμό αναλόγων ποσών και την γραφική τους παράσταση, που με το ποσοστό 4,2% στην τιμή περνά η $\Psi = A \cdot X$ από την αρχή και γιατί, ενισχύει την υπόθεση ότι όσοι δεν κατανοούν τον ορισμό δύσκολα «μεταφράζουν» την γραφική παράσταση. Μικρότερος αριθμός λαθών 3,1% παρατηρείται στον ορισμό των αντιστρόφως ανάλογων ποσών, Μεγαλύτερο ποσοστό 7,3% δείχνει να προβληματίζεται με την σχέση των ανάλογων ποσών, ενώ σε συνδυασμούς ορισμού και γραφικής απεικόνισης πολύ λίγοι 2,1% μπερδεύουν τους συσχετισμούς και ακόμη λιγότεροι 1% όταν οι συζεύξεις εννοιών είναι περισσότερες.

Πίνακας5 - ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ-ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΓΩΝΙΑΣ	8	1,0	9,4	9,4
2	ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ	3	,4	3,5	12,9
3	1-2	35	4,2	41,2	54,1
4	ΠΟΙΑ Η ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ-ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ	6	,7	7,1	61,2
5	1-2-7	13	1,5	15,3	76,5
6	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	3	,4	3,5	80,0
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	17	2,0	20,0	100,0
	Σύνολο	85	10,1	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	625	74,4		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	130	15,5		
	Σύνολο	755	89,9		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Σε μία γρήγορη παρατήρηση του Πίνακα5 βλέπουμε την σαφέστατα μικρή προτίμηση των διδασκόντων στις εγγεγραμμένες γωνίες – κανονικά πολύγωνα (25,6%) σαν θέμα θεωρίας. Οι επιλογές των μαθητών δείχνουν μάλλον τάσεις αποφυγής, αφού το επιλέγει το 10,1% και το αποφεύγει το 15,5%. Παρόλα αυτά μόνο το 3,5% έχει ελλιπή γνώση του αντικειμένου, ένα άλλο πολύ μεγάλο ποσοστό της τάξης του 76,5% κάνει λάθη σε αρκετές περιπτώσεις που θα συζητήσουμε παρακάτω και ένα μικρό ποσοστό 20% είναι αλάνθαστο. Θα επανέλθουμε στα βασικά αυτά χαρακτηριστικά κάθε μίας περίπτωσης, όταν κάνουμε σύνοψη του θεωρητικού περιεχομένου με επί μέρους συγκρίσεις.

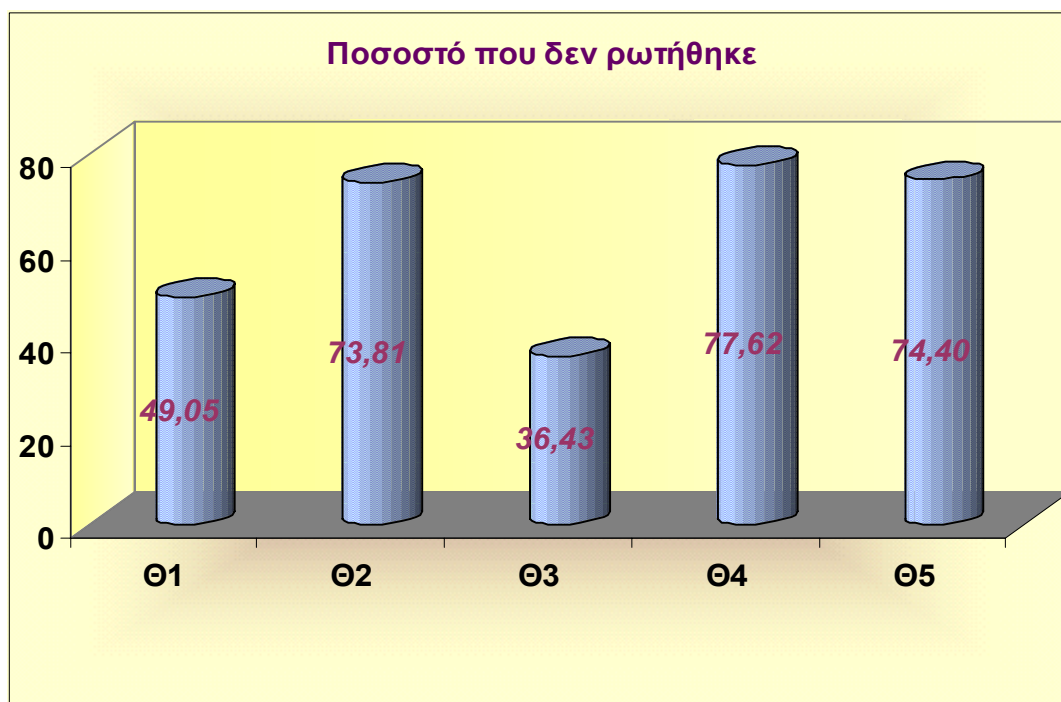
Αν και τα ποσοστά στις περιπτώσεις *ορισμών εγγεγραμμένης και επίκεντρης* είναι κάτω από το 10% με 9,4 και 3,5 αντίστοιχα με το λάθος που περιγράφεται στην σχέση τους να πλησιάζει περίπου τον μέσο όρο αυτών των ποσοστών με 7,1%, στον συνδυασμό και των δύο έχουμε εκτίναξη του λάθους στο 41,2%, ενώ υψηλό είναι το ποσοστό του συνδυασμού και των δύο ορισμών μαζί με την σχέση των γωνιών 15,3%. Αξίζει εδώ να επανέλθουμε όταν παρατηρήσουμε την συμπεριφορά των μαθητών του δείγματος σε αντίστοιχα θέματα ασκήσεων για περαιτέρω προβληματισμό και διερεύνηση.

A1. Συγκριτικά Θεωρητικού Περιεχομένου

Στους παρακάτω πίνακες θα αντικαταστήσουμε τις περιπτώσεις της 2^{ης} στήλης με τις αντίστοιχες της 1^{ης} στήλης του πίνακα που ακολουθεί:

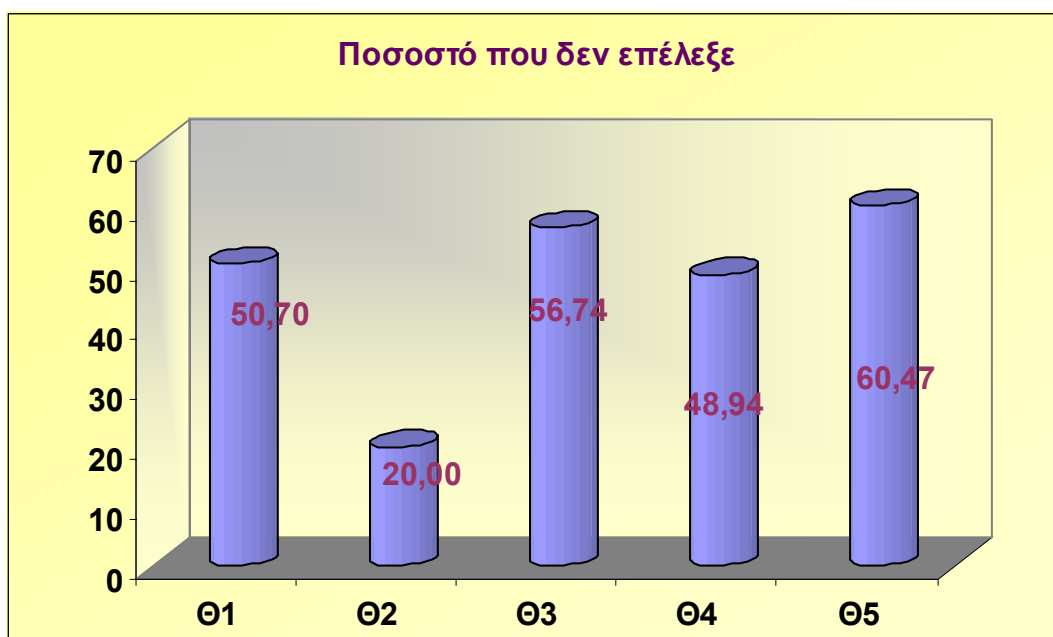
Θ1	Δυνάμεις.
Θ2	Πυθαγόρειο Θεώρημα.
Θ3	Τριγωνομετρικούς αριθμούς.
Θ4	Ανάλογα – Αντιστρόφως Ανάλογα ποσά.
Θ5	Εγγεγραμμένες γωνίες - Πολύγωνα

Πίνακας Σ1



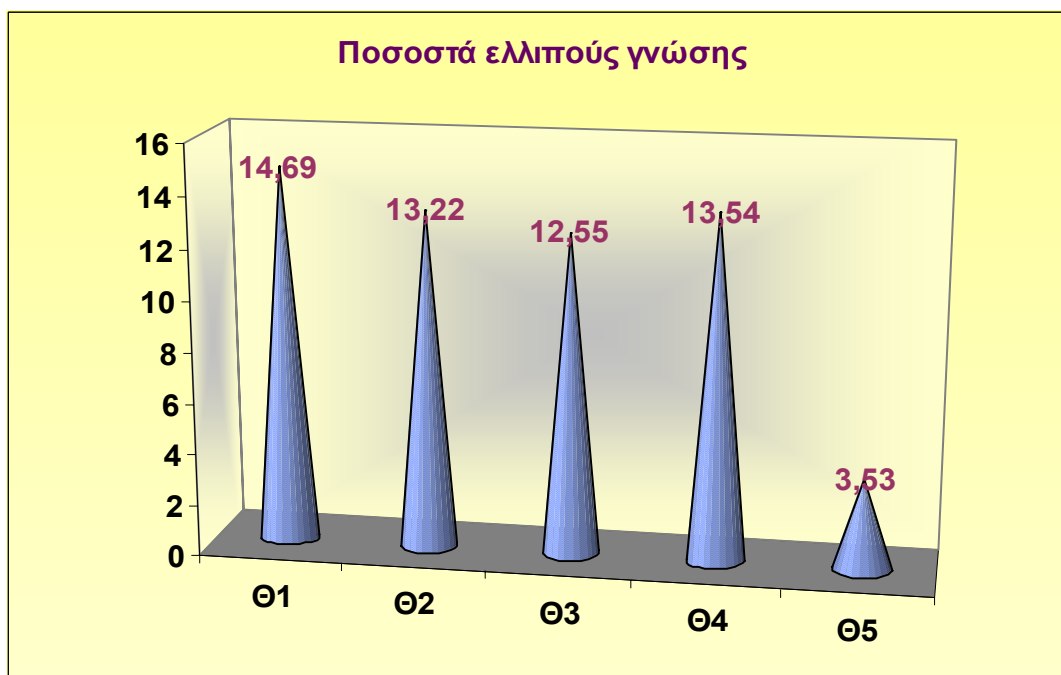
Αγαπημένο θέμα θεωρίας εδώ με μεγάλη μάλιστα απόκλιση από τον μέσο όρο οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, ακολουθούν οι δυνάμεις με 13% περίπου διαφορά και αποφεύγονται θέματα με ποσά ανάλογα – αντιστρόφως ανάλογα.

Πίνακας Σ2



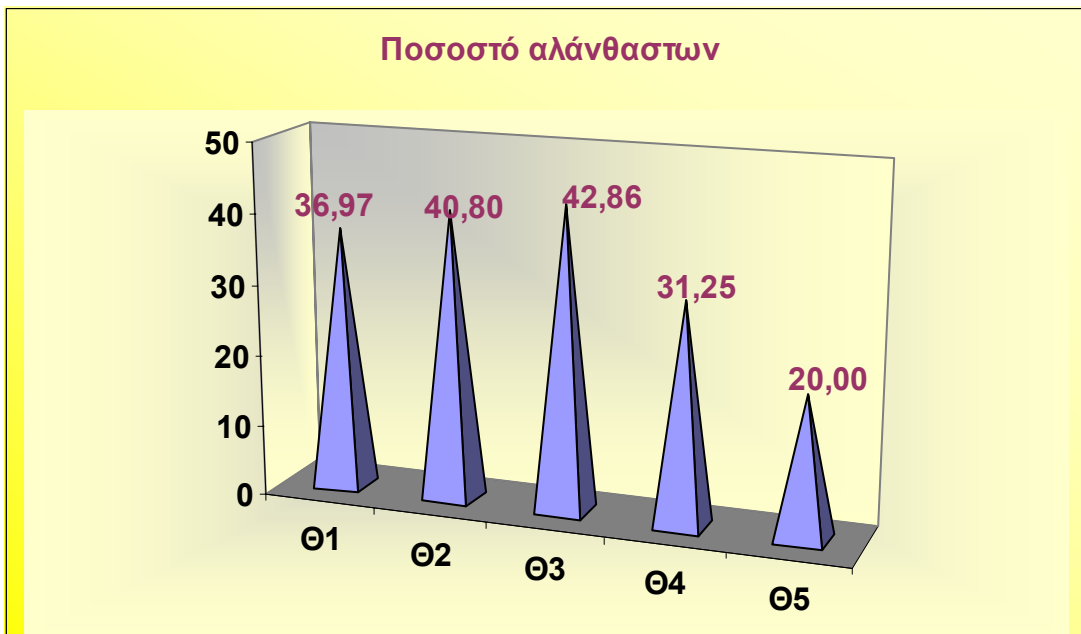
Αντίθετες απόψεις μαθητών – καθηγητών. Αν και οι καθηγητές προτιμούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οι μαθητές τους αποφεύγουν και προτιμούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Πίνακας Σ3



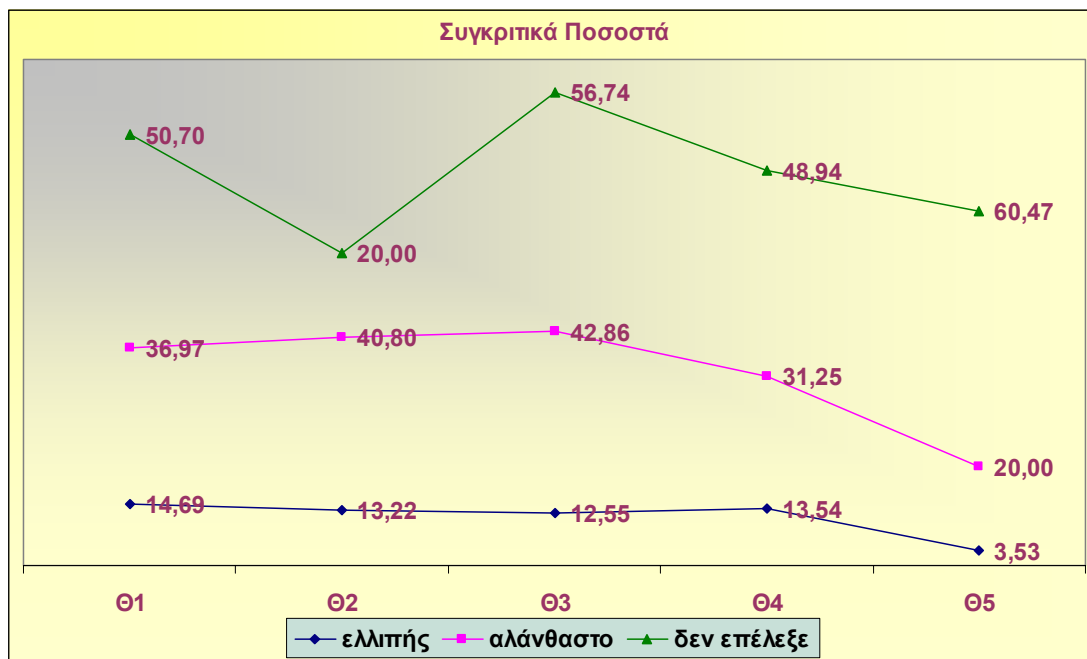
Πάρα πολύ χρήσιμος πίνακας ο Σ3. Τα ποσοστά ελλιπούς γνώσης είναι σχεδόν ταυτόσημα με μόνη εξαίρεση την περίπτωση εγγεγραμμένων γωνιών – κανονικών πολυγώνων, που αν και αποφεύγεται και από καθηγητές και από μαθητές εντούτοις όταν επιλέγεται έχουμε θετικά αποτελέσματα.

Πίνακας Σ4



Στον Σ4 πίνακα παρατηρούμε και πάλι μια συμπεριφορά αξιοπρόσεκτη. Τα 4 πρώτα θέματα δεν ξεφεύγουν και πολύ από τον μέσο όρο τους, ενώ η περίπτωση εγγεγραμμένων γωνιών – κανονικών πολυγώνων συμπεριφέρεται και πάλι μοναδικά. Να παρατηρήσουμε εδώ ότι το λάθος που εκτοξεύει τα ποσοστά λάθους πολύ ψηλά είναι ο συνδυασμός δύο ορισμών εγγεγραμμένης – επίκεντρης.

Πίνακας Σ5



Στον συγκεντρωτικό Σ5 μπορούμε ξεκάθαρα να παρατηρήσουμε τις τάσεις και τις συμπεριφορές του δείγματος όπως περιγράφονται στους των προηγούμενους 3 πίνακες.

Β. Ασκήσεων

Η διερεύνηση και ο προβληματισμός της αντιμετώπισης από τους μαθητές του κομματιού που αφορά τις ασκήσεις στις εξετάσεις, καλύπτεται από 5 μεταβλητές που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αναλυτικά.

Πίνακας6 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ	29	3,5	6,4	6,4
2	ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΕΚΘΕΤΗ	18	2,1	4,0	10,4
3	ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΘΕΤΙΚΟ ΕΚΘΕΤΗ	5	,6	1,1	11,5
4	ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ	9	1,1	2,0	13,5
5	ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΘΕΤ. ΑΡΝ.	6	,7	1,3	14,8
6	ΔΥΝ. ΣΤΗ ΜΗΛΕΝΙΚΗ	7	,8	1,5	16,3
7	ΚΑΝΕΙ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΑΝΤΙ ΟΜΩΝΥΜΑ	7	,8	1,5	17,9
8	ΑΛΛΑΖΕΙ ΠΡΑΞΗ ΑΠΟ ΠΟΛ/ΜΟ ΣΕ ΑΦΑΙΡΕΣΗ-ΠΡΟΣΘΕΣΗ	11	1,3	2,4	20,3
9	ΥΨΩΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ	2	,2	,4	20,8
10	ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ - ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΟΛΑ ΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ	16	1,9	3,5	24,3
11	1 - 6 - 8 - Μη εφαρμογή ιδιοτήτων δυνάμεων για αποτέλεσμα	1	,1	,2	24,5
12	ΣΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΕ ΒΑΖΕΙ ΤΟΝ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΣΕ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ	12	1,4	2,6	27,2
13	1 ΣΤΗ ΤΡΙΤΗ=3	3	,4	,7	27,8
14	ΠΟΛ/ΜΟΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ	1	,1	,2	28,0
15	ΒΑΖΕΙ =>ΑΝΤΙ =	1	,1	,2	28,3
16	ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΕΣ	3	,4	,7	28,9
17	ΜΗ ΣΥΣΤΗΜ. ΛΑΘΗ	22	2,6	4,9	33,8
18	14 - Αναγωγή ομοίων όρων	1	,1	,2	34,0
19	12 - Αντικατάσταση χωρίς Αναγωγή	3	,4	,7	34,7
20	10 - 14	1	,1	,2	34,9
21	10 - 12	6	,7	1,3	36,2
22	2 - 6	6	,7	1,3	37,5
23	2 - 12	8	1,0	1,8	39,3
24	1 - Μη εφαρμογή ιδιοτήτων δυνάμεων για αποτέλεσμα	2	,2	,4	39,7
	ΕΛΛΗΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	160	19,0	35,3	75,1
25	3 - 4 - 5	13	1,5	2,9	77,9
26	ΠΛΗΝ 3 ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ =9	7	,8	1,5	79,5
27	13 - 26	1	,1	,2	79,7
28	1 - 3 - 4	7	,8	1,5	81,2
29	1 - 10	6	,7	1,3	82,6
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	79	9,4	17,4	100,0
	Σύνολο	453	53,9	100,0	
Ακυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	223	26,5		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	164	19,5		
	Σύνολο	387	46,1		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Η ανάγνωση του Πίνακα6 επιβεβαιώνει την προτίμηση των καθηγητών σε θέματα που σχετίζονται με αριθμητικές παραστάσεις, όπως άλλωστε είναι φυσικό αφού στην ενότητα αυτή αφιερώνεται σημαντικό κομμάτι του χρόνου διδασκαλίας σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών. Έτσι σε ποσοστό 73,5 % συναντούμε θέματα – ασκήσεις, που επιλέγουν και οι μαθητές με σχετικά μεγάλη προθυμία 53,9%, ενώ αποφεύγει το 19,5%. Από τους μαθητές που ασχολούνται με θέματα αριθμητικών παραστάσεων, ελλιπή γνώση καταγράφουμε στο 35,3%, αλάνθαστες απαντήσεις έχουμε σε ένα ποσοστό 17,4%, μη συστηματικά λάθη καταγράφονται σε ποσοστό 4,9% και το 52,7% κάνει λάθη σε αρκετές περιπτώσεις που θα αναλύσουμε στις επόμενες παραγράφους. Να διευκρινίσουμε εδώ ότι με τον όρο μη συστηματικά λάθη εννοούμε τα λάθη που γίνονται από απροσεξία, βιασύνη κ.λ.π. και δεν είναι λάθη μεθοδολογικής προσέγγισης των θεμάτων που καλούνται οι μαθητές μας να απαντήσουν.

Ένα κλασσικό λάθος με ποσοστό 4% είναι η δουλειά με δυνάμεις σε αρνητικό εκθέτη, ποσοστό μάλλον αναμενόμενο αφού και στο θεωρητικό κομμάτι της έρευνας το ποσοστό κυμαίνεται στο 3,3%. Το αντίστοιχο ποσοστό για θετικό εκθέτη είναι μόλις 1,1%. Ακόμη όπου υπάρχει συνδυασμός της ύψωσης δύναμης σε αρνητικό εκθέτη με άλλες περιπτώσεις (δύναμη στην μηδενική, παρενθέσεις), παρατηρείται μία ανάλογη «σύγχυση» που την εκφράζουν τα αντίστοιχα ποσοστά των περιπτώσεων 22, 23 του Πίνακα6.

Στα ίδια πάνω κάτω επίπεδα ποσοστών βρίσκουμε και τις περιπτώσεις λαθών όπως η αλλαγή πράξης από πολ/σμό σε πρόσθεση – αφαίρεση (2,4%), η μη χρήση παρένθεσης σε περιπτώσεις αντικατάστασης με αρνητικούς αριθμούς (2,6%), η μη αλλαγή όλων των πρόσημων όταν απαλείφεται μία παρένθεση (3,5%), η πρόσθεση θετικών – αρνητικών (1,3%), η αδυναμία ύψωσης δύναμης στην μηδενική (1,5%) και το να γίνεται απαλοιφή παρονομαστών αντί ομωνύμων κλασμάτων (1,5%).

Την μεγαλύτερη δυσκολία στα προβλήματα με τις αριθμητικές παραστάσεις την συναντούμε βέβαια στην προτεραιότητα των πράξεων (6,4%), ακόμη και όταν έχουμε συνδυασμό προτεραιοτήτων με άλλα θέματα όπως στις περιπτώσεις 28,29 του Πίνακα6.

Πίνακας7 - ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ-ΑΝΙΣΩΣΗΣ

Έγκυρο		Συχνότητ α	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	Ε.Κ.Π-ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗ	8	1,0	1,1	1,1
2	ΔΕΝ ΠΟΛ/ΖΕΙ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	20	2,4	2,9	4,0
3	ΑΠΛΟΠΟΙΕΙ ΚΑΙ ΔΕΝ ΒΑΖΕΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ	8	1,0	1,1	5,1
4	ΔΕΝ ΠΟΛ/ΖΕΙ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ	36	4,3	5,1	10,3
5	ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΣΩΣΤΑ ΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ	49	5,8	7,0	17,3
6	ΔΕΝ ΧΩΡΙΖΕΙ ΣΩΣΤΑ ΓΝΩΣΤΟΥΣ-ΑΓΝ.	4	,5	,6	17,9
7	ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ	4	,5	,6	18,4
8	ΔΕΝ ΔΙΑΙΡΕΙ ΜΕ ΤΟΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ	2	,2	,3	18,7
9	ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΦΟΡΑ	23	2,7	3,3	22,0
10	ΑΠΟ ΑΝΙΣΩΣΗ ΠΑΕΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΗ	6	,7	,9	22,9
11	ΚΟΙΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ	20	2,4	2,9	25,7
12	ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΑΡΝ.ΑΚΕΡΑΙΑ ΛΥΣΗ	3	,4	,4	26,1
13	ΑΦΑΙΡΕΙ ΜΕΤΒΑΗΤΕΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ	13	1,5	1,9	28,0
14	ΔΕΝ ΚΑΝΕΙ ΑΠΑΛ. ΠΑΡ ΚΑΙ ΤΗ ΛΥΝΕΙ	2	,2	,3	28,3
15	2 - 4 - 11	1	,1	,1	28,4
16	ΚΟΙΝΕΣ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ	13	1,5	1,9	30,3
17	4 -7- 16	7	,8	1,0	31,3
18	1 - 9 - 11	1	,1	,1	31,4
19	5 - 9 - 11	4	,5	,6	32,0
20	ΜΗ ΣΥΣΤΗΜ.ΛΑΘΗ	49	5,8	7,0	39,0
21	3X=0 ΑΔΥΝΑΤΗ	3	,4	,4	39,4
22	ΔΙΑΙΡΕΙ ΔΙΑ ΜΗΔΕΝ	1	,1	,1	39,6
23	2 - 4	3	,4	,4	40,0
24	ΔΙΑΙΡΕΙ ΜΕ ΤΟ $αχ$ & ΤΑ ΔΥΟ ΜΕΛΗ	2	,2	,3	40,3
25	2 -9	2	,2	,3	40,6
26	5 - 6- 16	4	,5	,6	41,1
27	5 - 7	3	,4	,4	41,6
28	5 - 7- 11	4	,5	,6	42,1
	ΕΛΛΗΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	202	24,0	28,9	71,0
29	2 -5 -7 - 11	3	,4	,4	71,4
30	2 - 5 - 7	1	,1	,1	71,6
31	9 - 11	1	,1	,1	71,7
	ΑΛΛΑΘΑΣΤΟ	198	23,6	28,3	100,0
	Σύνολο	700	83,3	100,0	
Ακυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	43	5,1		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	97	11,5		
	Σύνολο	140	16,7		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Εδώ φαίνεται να έχουμε το αγαπημένο θέμα και των καθηγητών αλλά και των μαθητών, αναμενόμενο άλλωστε με βάση την ευρύτητα και τους συνδυασμούς που

προσφέρει. Έτσι το 94,9% των ασκήσεων είναι από την ενότητα αυτή και το αποφεύγει μόνο το 11,5% του συνόλου των μαθητών. Από τους μαθητές που το επιλέγουν αλάνθαστοι είναι το 28,3%, ενώ ελλιπής γνώση παρατηρείται σε ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό της τάξης του 28,9%. Το υπόλοιπο 42,8% προσπαθεί και τα λάθη του κατηγοριοποιούνται σε πάρα πολλές τιμές, που σε δεύτερο χρόνο και ανάγνωση καλό είναι να συσχετιστούν ομαδοποιημένες, ενώ τα μη συστηματικά λάθη είναι εδώ 7%. Μπορούμε βέβαια να μιλήσουμε για ορισμένες σοβαρές περιπτώσεις, όπως στο 7% που δεν αλλάζει σωστά τα πρόσημα στην επιμεριστική ιδιότητα σημαντικό θέμα αυτό και όταν συνδυάζεται με άλλες τιμές (βλ. Πίνακα 6 περιπτώσεις 19, 25, 26, 27, 28, 29), ή το 5,1% που δεν πολλαπλασιάζει όλους τους όρους σε μια παρένθεση. Σημαντικό επίσης θέμα προκύπτει από τον μη πολλαπλασιασμό όλων των όρων μιας εξίσωσης (2,9%), την μη αλλαγή φοράς σε ανίσωση (3,3%), την κατανόηση των κοινών λύσεων (2,9%) ή των κοινών ακέραιων λύσεων (1,9%) και την αφαίρεση μεταβλητών με σταθερές (1,9%), θέματα όλα για προβληματισμό, μελέτη και παραπάνω έρευνα.

Στον Πίνακα 6 μπορούμε να παρατηρήσουμε πάρα πολλές περιπτώσεις και συνδυασμούς τους, όπου μπορεί μεν τα ποσοστά να μην είναι πάνω από 1%, αλλά είναι ενδεικτικά των μεθόδων λύσεων που συνήθως χρησιμοποιούν οι μαθητές και οδηγούν σε λάθη, όπως όταν δεν κάνουν απαλοιφή παρονομαστών αλλά λύνουν την άσκηση, ή όταν διαιρούν με ax και τα δύο μέλη. Ακόμη και σε πιο «απλά» θέματα συναντούμε δυσκολίες, όπως η αναγωγή ομοίων όρων, ο σωστός χωρισμός γνωστών – αγνώστων και η «αλλαγή» ανίσωσης – εξίσωσης.

Πίνακας 8 - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ-ΤΡΙΓ.ΑΡΙΘΜΟΙ-ΕΓΓΕΓΡ.ΓΩΝΙΕΣ-ΕΜΒΑΔΑ

Έγκυρο		Συχνότητ α	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΝ ΞΕΧΩΡΙΖΕΙ ΤΗΝ ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ	5	,6	1,1	1,1
2	ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΕΤΡ.ΡΙΖΑΣ	5	,6	1,1	2,3
3	ΣΧΕΣΗ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΗΜΩ, ΣΥΝ, ΕΦΩ	13	1,5	2,9	5,2
4	ΤΥΠΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ	4	,5	,9	6,1
5	ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΤΥΠΟ	2	,2	,5	6,5
6	ΔΕΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΕΙ ΟΤΙ Η ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΣΕ ΔΙΑΜΕΤΡΟ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΗ	28	3,3	6,3	12,8
7	ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ.- ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΟΞΟΥ	20	2,4	4,5	17,3
8	ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ	12	1,4	2,7	20,0
9	ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ	3	,4	,7	20,7
10	ΠΑΙΡΝΕΙ ΔΙΑΜΕΤΡΟ ΑΝΤΙ ΑΚΤΙΝΑ	9	1,1	2,0	22,7
11	ΛΑΘΟΣ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ	4	,5	,9	23,6
12	ΔΕΝ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΟΡΘ ΤΡΙΓ ΑΒΓ ΜΕ ΔΙΑΜΕΤΡΟ ΒΓ	10	1,2	2,3	25,9
13	ΣΤΟ ΕΜΒ ΟΡΘ. ΤΡΙΓ ΠΑΙΡΝΕΙ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΥΠΟΤ. ΕΝΩ ΞΕΡΕΙ ΤΙΣ ΚΑΘΕΤΕ	11	1,3	2,5	28,4
14	6 - 13	8	1,0	1,8	30,2
15	ΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΤΟ ΠΑΙΡΝΕΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ	3	,4	,7	30,9
16	ΠΑΙΡΝΕΙ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΑΝΤΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ	2	,2	,5	31,3
17	6 - 9	1	,1	,2	31,5
18	ΛΕΙΠΕΙ Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑΣ	6	,7	1,4	32,9
19	ΑΦΑΙΡΕΙ ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΑΠΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ	2	,2	,5	33,3
20	ΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΛΑΘΗ	14	1,7	3,2	36,5
21	ΑΦΑΙΡΕΙ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΒ ΚΥΚΛ. ΤΟ ΕΜΒ ΤΡΙΓ.ΕΝΩ ΠΡΕΠΕΙ ΑΠΤΟ ΜΙΣΟ .	1	,1	,2	36,7
22	6 - 21	2	,2	,5	37,2
23	7 - 8	14	1,7	3,2	40,3
24	1 - 3	15	1,8	3,4	43,7
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	136	16,2	30,6	74,3
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	114	13,6	25,7	100,0
	Σύνολο	444	52,9	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	44	5,2		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	352	41,9		
	Σύνολο	396	47,1		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Τα γεωμετρικά θέματα που περιγράφονται στον Πίνακα8 επιλέγονται σαν θέματα σε ποσοστό 94,8%, αλλά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών 41,9% τα αποφεύγει και μόνο το 52,9% προσπαθεί να τα αντιμετωπίσει. Από το ποσοστό αυτό αλάνθαστοι είναι το 25,7%, 3,2% κάνει μη συστηματικά λάθη, ενώ ελλιπής γνώση καταγράφεται στο 30,6%. Το υπόλοιπο 43,7% κάνει διάφορα λάθη που θα τα συζητήσουμε στις επόμενες παραγράφους.

Η πρώτη ενότητα που θα μας απασχολήσει είναι η σχέση των μαθητών με την υποτείνουσα, ένα θεωρητικά εύκολο θέμα που όμως παρατηρούμε να δυσκολεύει τους μαθητές με μικρά μεν ποσοστά αλλά σε πολλά επίπεδα που βέβαια σχετίζονται μεταξύ τους. Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις που δεν την ξεχωρίζουν στο Πυθαγόρειο Θεώρημα (1,1%), στην τετραγωνική ρίζα (1,1%) και στον υπολογισμό της (1,4%). Αυτό μπορεί να συσχετιστεί με τα προβλήματα που διαφαίνονται όταν πρέπει να δουλέψουν σε ορθογώνιο τρίγωνο είτε υπολογίζοντας εμβαδόν (2,5%), είτε όταν είναι διάμετρος σε αντίστοιχο κύκλο(2,3%). Ακόμη θα πρέπει να διερευνηθεί και η σχέση με τα λάθη σε ποσοστό 2,9% στην σχέση πλευρών και τριγωνομετρικών αριθμών, ιδιαίτερα όταν συνοδεύεται από την υποτείνουσα στο Πυθαγόρειο (3,4%).

Το πλέον υψηλό ποσοστό που καταγράφεται στα συστηματικά λάθη είναι αυτό της μη αιτιολόγησης ότι η εγγεγραμμένη σε διάμετρο είναι ορθή με 6,3%. Αυτό το κομμάτι της γεωμετρίας προβληματίζει τους μαθητές ιδιαίτερα αφού ένα 4,5% αγνοεί την σχέση εγγεγραμμένου και αντίστοιχου τόξου, το μήκος του τόξου το κάνει λάθος το 2,7%, τον συνδυασμό των δύο προηγούμενων το 3,2% δεν τον πετυχαίνει και άλλο ένα 2% παίρνει την διάμετρο αντί για την ακτίνα.

Τέλος αξιοσημείωτα είναι τα λάθη σε μικρά ποσοστά σε περιπτώσεις όπως λάθος αφαίρεση εμβαδών, να παίρνουν ισοσκελές ένα τυχαίο τραπέζιο, λάθος το εμβαδόν του κύκλου και άλλα σε ακόμη μικρότερη συχνότητα.

Πίνακας 9 - ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ -ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό%
1	ΣΥΓΧΕΕΙ ΤΟ Χ ΜΕ ΤΟ Ψ	2	,2	5,9	5,9
2	ΔΕΝ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ	3	,4	8,8	14,7
3	ΔΕΝ ΒΡΙΣΚΕΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ	1	,1	2,9	17,6
4	ΔΕΝ ΕΦΑΡΜΟΖΕΙ Π.Θ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΣΤΑΣΗ	2	,2	5,9	23,5
5	ΕΦΑΡΜΟΖΕΙ ΛΑΘΟΣ ΤΟ Π.Θ ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΕΙ ΤΗΝ ΑΠΟΣΤΑΣΗ	2	,2	5,9	29,4
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	11	1,3	32,4	61,8
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	13	1,5	38,2	100,0
	Σύνολο	34	4,0	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	786	93,6		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	18	2,1		
	Άκυρα	2	,2		
	Σύνολο	806	96,0		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Στον πίνακα 9 θα σταθούμε με προβληματισμό για τα αποτελέσματά του κυρίως γιατί έχουμε ένα αρνητικά σημαντικό αριθμό θεμάτων στα γραπτά του δείγματος, μόλις το 6,1%. Σε δεύτερο χρόνο θα γίνει προσπάθεια να συσχετιστούν οι τάσεις που διαφαίνονται με τα αποτελέσματα των άλλων σχετικών πινάκων. Πάντως παρατηρούμε ότι το 2,1% δεν επιλέγει τα θέματα αυτού του κύκλου και από αυτούς που το τολμούν 38,2% είναι αλάνθαστοι, 32,4 έχουν ελλιπή γνώση και το υπόλοιπο περίπου 30% προβληματίζεται στα θέματα που λίγο πολύ περιμέναμε από τις προηγούμενες αναφορές που σχετίζονται κυρίως με το Πυθαγόρειο Θεώρημα την εφαρμογή του και βέβαια την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. Καινούργιο στοιχείο και πολύ σημαντικό είναι αυτό που δείχνει την σύγχυση που παρατηρείται με το Χ και το Ψ.

Πίνακας 10 - ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟ \Leftrightarrow

		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό %
1	ΒΑΖΕΙ =>	68	8,1	9,8	9,8
2	ΒΑΖΕΙ \Leftrightarrow	11	1,3	1,6	11,4
3	ΔΕΝ ΒΑΖΕΙ ΤΙΠΟΤΑ	584	69,5	84,0	95,4
4	ΒΑΖΕΙ =	32	3,8	4,6	100,0
	Σύνολο	695	82,7	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	41	4,9		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	103	12,3		
	Άκυρο	1	,1		
	Σύνολο	145	17,3		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

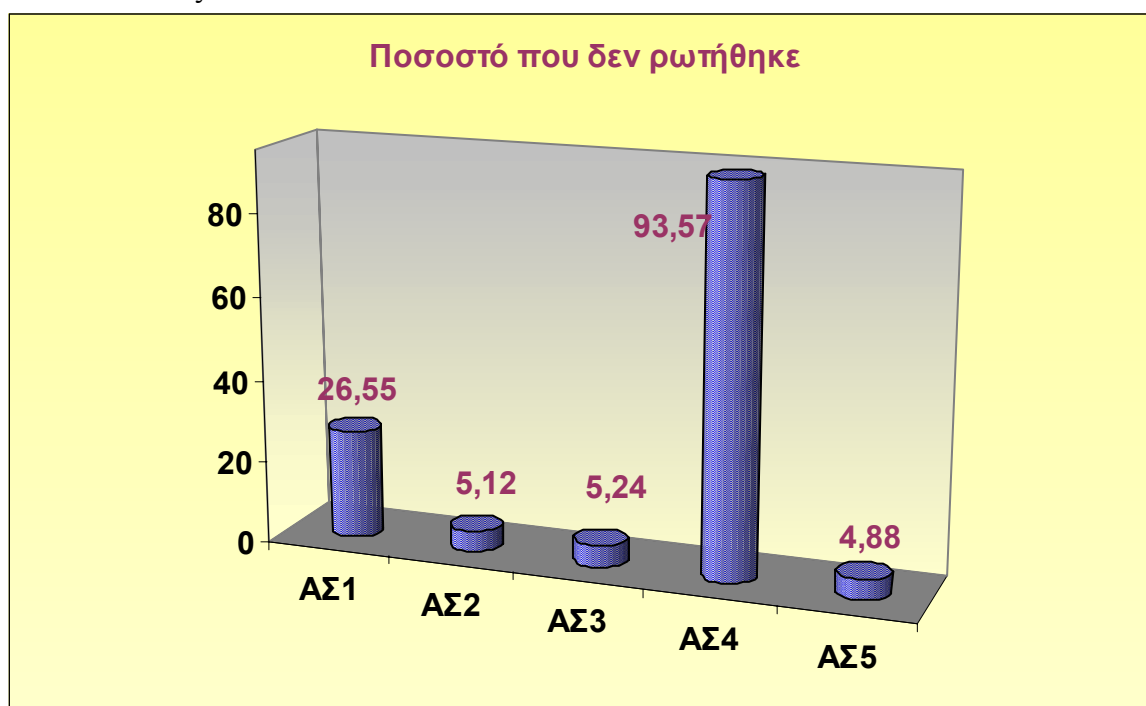
Αντίθετα με τον Πίνακα 9 εδώ στον Πίνακα 10 έχουμε σαφέστατη και πλήρη εικόνα του τι συμβαίνει με το σύμβολο \Leftrightarrow . Σε ποσοστό 95% είναι μέσα στα θέματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές μας και δεν το επιλέγει μόνο το 12,3%. Από αυτούς που έχουν επιλέξει θέμα που συσχετίζεται με το σύμβολο αυτό, το 9,8% βάζει =>, το 1,6% διαλέγει το \Leftrightarrow , ένα 4% το ταυτίζει με το σύμβολο της ισότητας και το 84% δεν βάζει τίποτε.

B1. Συγκριτικά Ασκήσεων

Στους παρακάτω συγκριτικούς πίνακες θα αντικαταστήσουμε τις περιπτώσεις της 2^{ης} στήλης με τις αντίστοιχες της 1^{ης} στήλης του πίνακα που ακολουθεί:

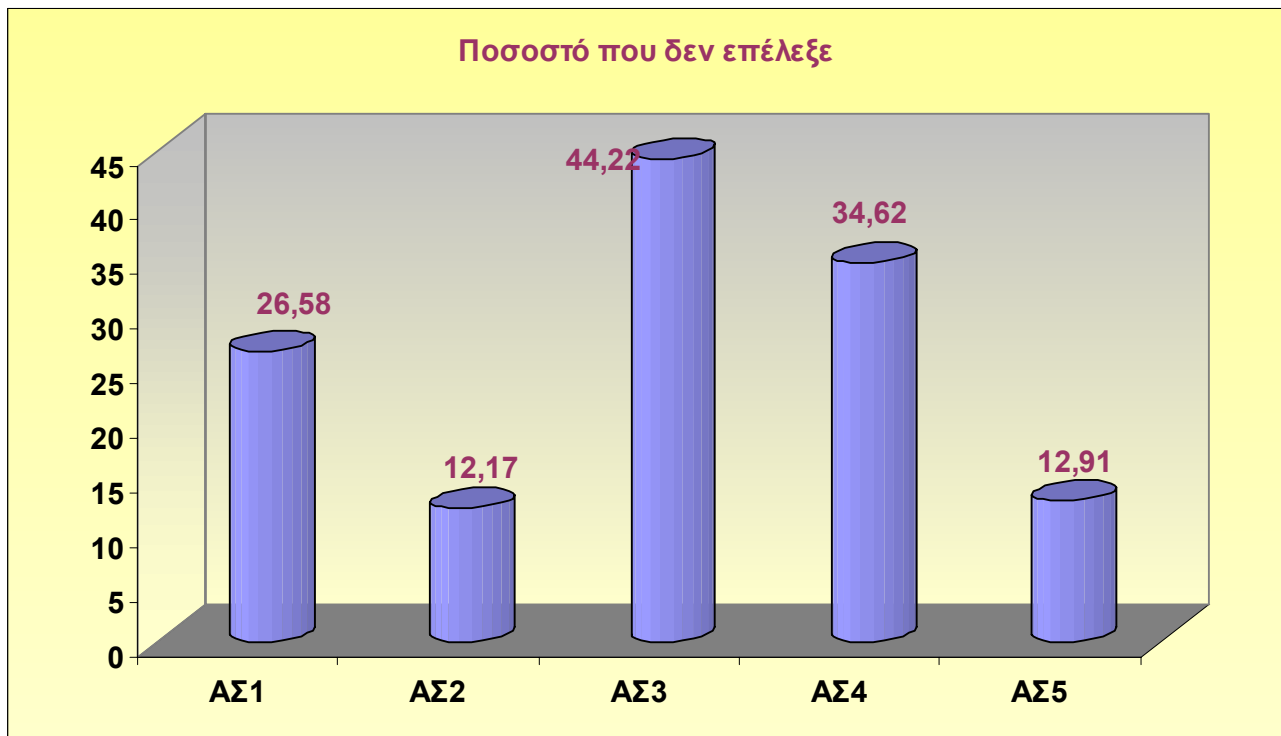
ΑΣ1	Αριθμητικές Παραστάσεις.
ΑΣ2	Επίλυση εξίσωσης - ανίσωσης.
ΑΣ3	Πυθαγόρειο – Τριγ. Αριθμοί – Εγγεγρ. Γωνίες - Εμβαδά.
ΑΣ4	Συντεταγμένες – Απόσταση σημείων.
ΑΣ5	Το σύμβολο \Leftrightarrow

Πίνακας ΑΣ1



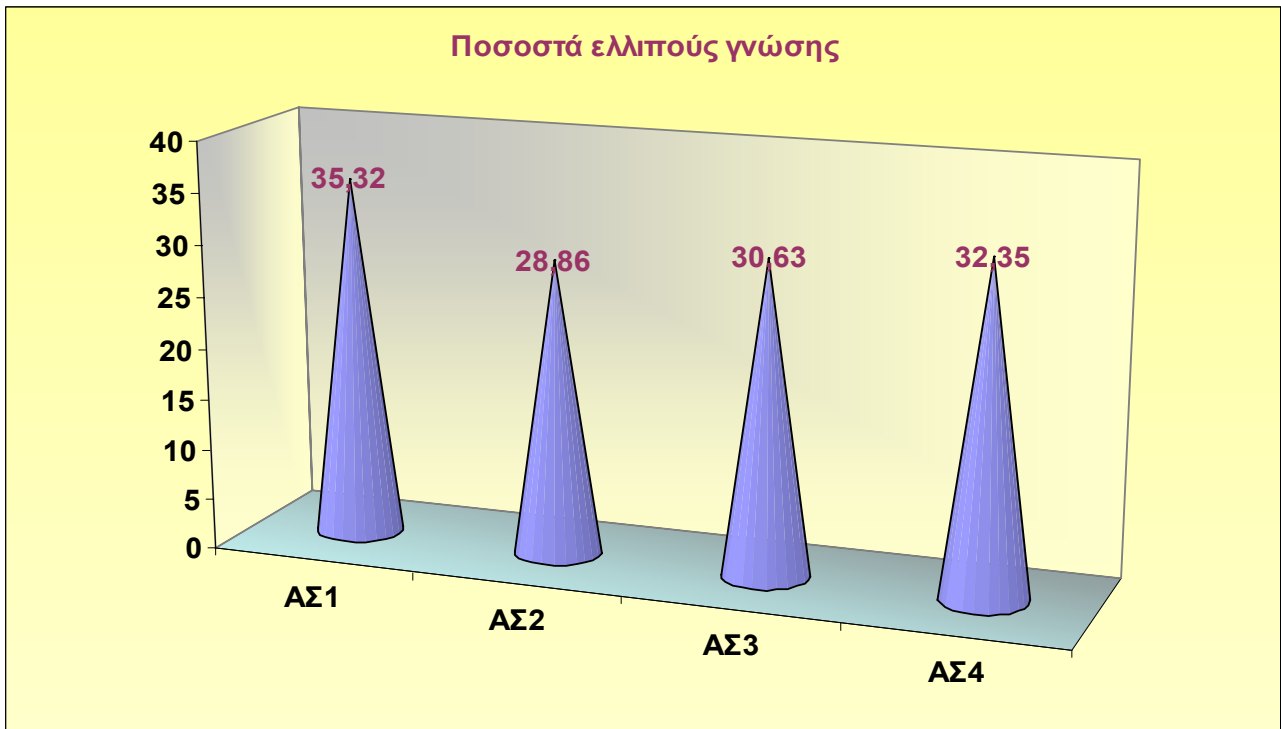
Σημαντική η διαπίστωση ότι πρώτη επιλογή των καθηγητών είναι εξισώσεις – ανισώσεις, Πυθαγόρειο – τριγωνομετρικοί αριθμοί – εγγεγραμμένες γωνίες – εμβαδά, σύμβολο \Leftrightarrow , αφού επιλέγονται σε πολύ μεγάλα ποσοστά. Μια μεγάλη επίσης μερίδα συναδέλφων επιλέγει αριθμητικές παραστάσεις και φαίνεται να αποφεύγουν οι περισσότεροι ασκήσεις που χρειάζονται συντεταγμένες – απόσταση σημείων.

Πίνακας ΑΣ2



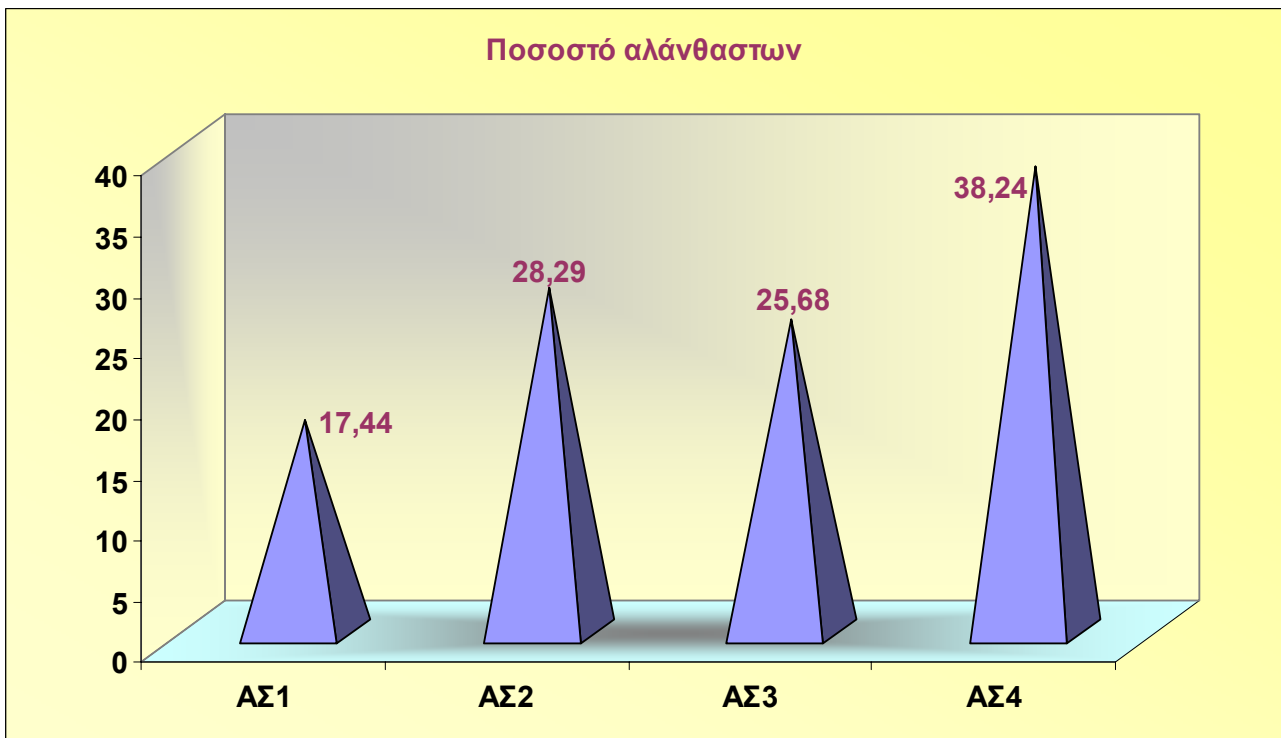
Την επιλογή των καθηγητών όσον αφορά τα θέματα γεωμετρίας δεν φαίνεται να επικροτούν οι μαθητές, αφού ένα πολύ μεγάλο κομμάτι της μαθητικής κοινότητας το αποφεύγει. Μεγάλο ποσοστό επίσης αποφεύγει θέματα με συντεταγμένες – απόσταση σημείων, ενώ αγαπημένες επιλογές των μαθητών φαίνεται να είναι ασκήσεις με εξισώσεις – ανισώσεις, και ότι αφορά την χρήση του συμβόλου \Leftrightarrow , υπόθεση που αξίζει να συσχετιστεί αργότερα μιας και υπάρχει συνάφεια στα δύο αυτά θέματα.

Πίνακας ΑΣ3



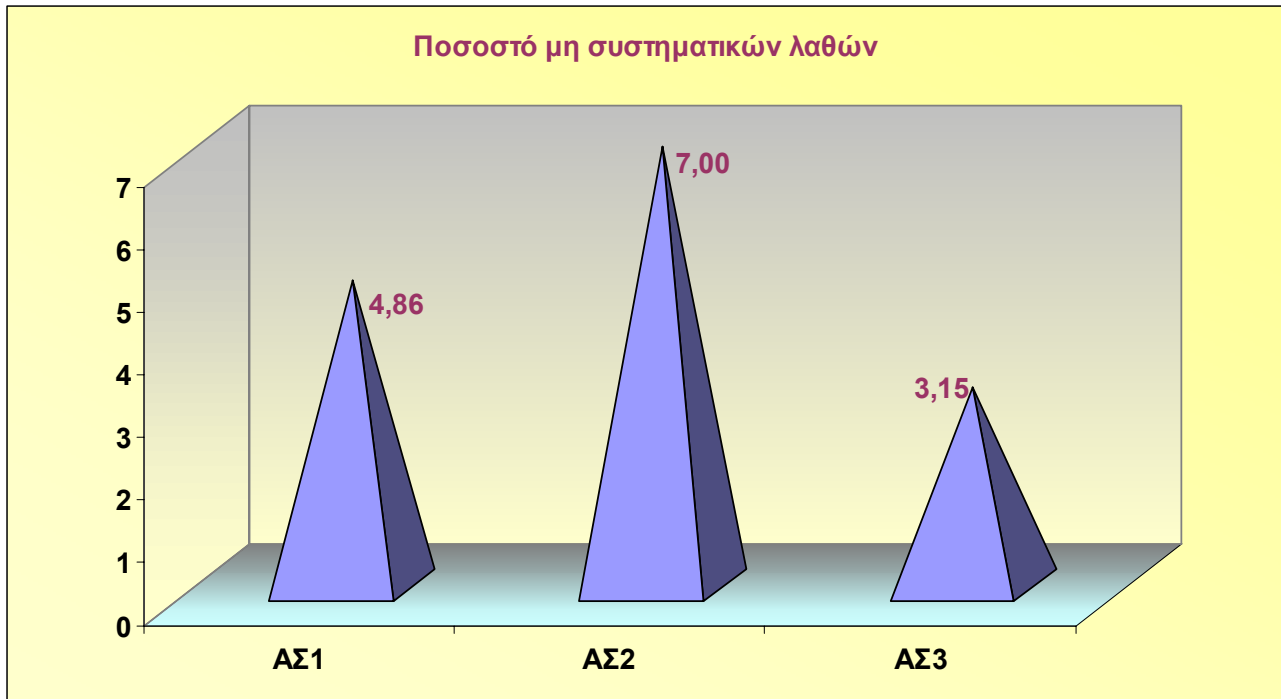
Σημαντική ισορροπία όσον αφορά τα ποσοστά που καταγράφονται στην ιδιαίτερη αυτή τιμή, σε όσες μεταβλητές μετρήθηκε.

Πίνακας ΑΣ4



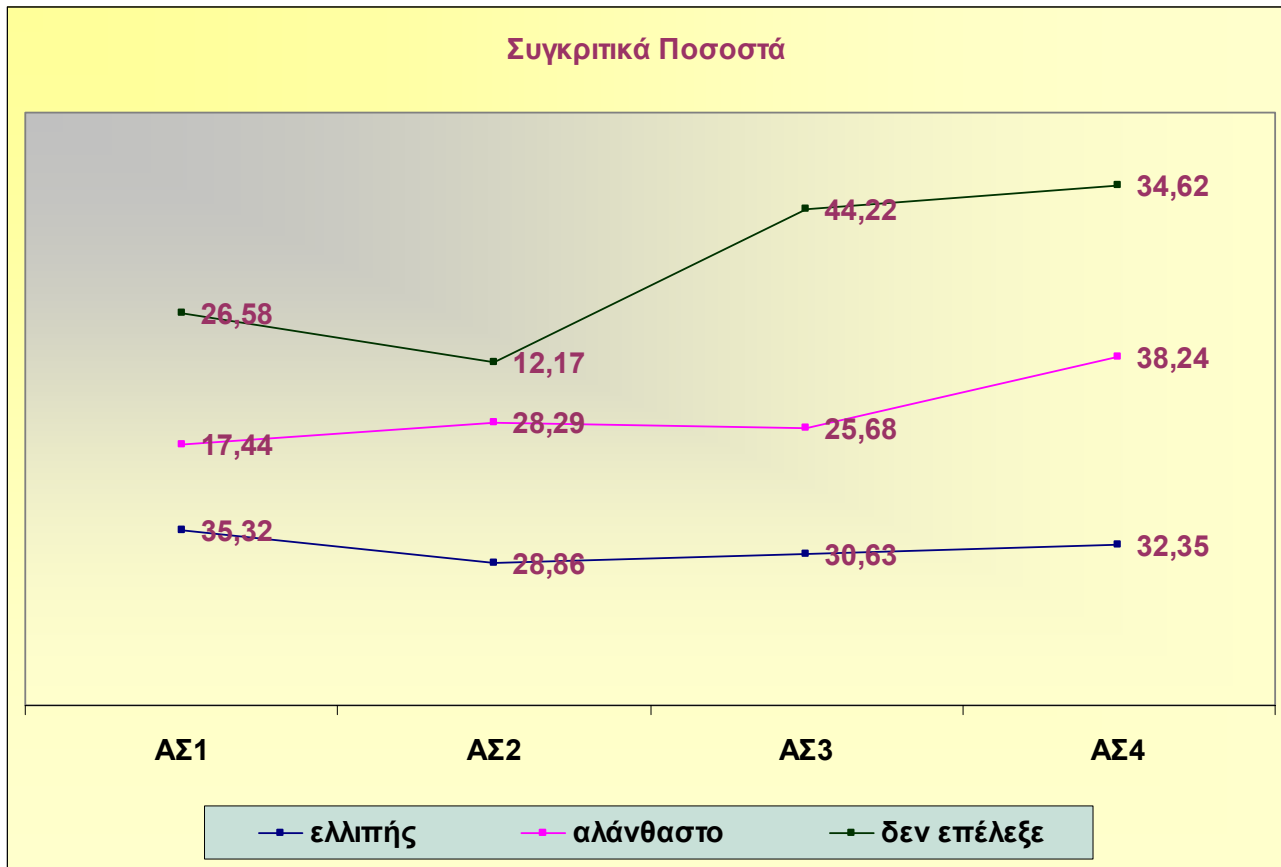
Παρατηρείται μια σχετική ισορροπία στις 3 πρώτες μεταβλητές, με την απόκλιση από τον μέσο όρο τους να είναι μικρή, ενώ στην περίπτωση των συντεταγμένων έχουμε σαφή άνοδο των αλάνθαστων απαντήσεων.

Πίνακας ΑΣ5



Και στις 3 περιπτώσεις που μετρήθηκαν μη συστηματικά λάθη, τα ποσοστά είναι πολύ κοντά στον μέσο όρο τους, πράγμα που επιβεβαιώνει κατά κάποιο τρόπο την επιλογή μας να μετρήσουμε αυτήν την σημαντική παράμετρο.

Πίνακας ΑΣ6



Εδώ μπορούμε να δούμε ομαδοποιημένα την συμπεριφορά τριών τιμών των μεταβλητών μας και να συσχετίσουμε την από κοινού καταγραφή τους για μελλοντικές υποθέσεις.

Γ. Ειδική Περίπτωση

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παρουσίασης, στο δείγμα υπάρχουν και πέντε μεταβλητές, που αφορούν ένα σχολείο του δείγματος και δεν μπορούν να εξεταστούν με τις υπόλοιπες μεταβλητές. Σε δεύτερο χρόνο θα ομαδοποιηθούν με άλλα σχολεία για μία διαφορετική προσέγγιση της όλης προσπάθειας. Παραθέτουμε όμως τις μεταβλητές και τους πίνακες συχνοτήτων τους για μελέτη και προβληματισμό.

Πίνακας Γ1 - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό%
	ΔΕΝ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΙ ΜΕ Χ ΤΟΝ ΑΓΝΩΣΤΟ	1	,1	4,2	4,2
	ΣΩΣΤΗ ΛΥΣΗ ΧΩΡΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗ	2	,2	8,3	12,5
	ΑΦΑΙΡΕΙ ΑΠ ΤΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ	3	,4	12,5	25,0
	ΔΕΝ ΠΟΛ/ΖΕΙ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ ΤΗΣ ΕΞ. ΕΠΙ ΤΟ Ε.Κ.Π.	1	,1	4,2	29,2
	ΠΡΟΣΘΕΤΕΙ ΤΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	2	,2	8,3	37,5
	ΛΑΘΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ	1	,1	4,2	41,7
	ΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟ ΛΑΘΟΣ	1	,1	4,2	45,8
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	6	,7	25,0	70,8
	ΑΛΛΑΝΘΑΣΤΟ	7	,8	29,2	100,0
	Σύνολο	24	2,9	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	798	95,0		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	17	2,0		
	System	1	,1		
	Σύνολο	816	97,1		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Πίνακας Γ2 - ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό%
	ΔΕΝ ΓΡΑΦΕΙ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ.	6	,7	20,7	20,7
	ΒΡΙΣΚΕΙ ΤΟΝ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΜΕ ΛΟΚΙΜΕΣ	18	2,1	62,1	82,8
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	3	,4	10,3	93,1
	ΑΛΛΑΝΘΑΣΤΟ	2	,2	6,9	100,0
	Σύνολο	29	3,5	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	798	95,0		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	12	1,4		
	System	1	,1		
	Σύνολο	811	96,5		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Πίνακας Γ3 - ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΓ.-ΠΛΕΥΡΑΣ ΤΕΤΡΓ.

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό%
	ΔΕΝ ΑΝΑΦΕΡΕΙ ΤΟ ΟΡΘ ΤΡΙΓ	1	,1	3,6	3,6
	ΔΕΝ ΕΦΑΡΜΟΖΕΙ Π.Θ	1	,1	3,6	7,1
	ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΙ ΤΗ ΓΩΝΙΑ ΜΕ α	1	,1	3,6	10,7
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	13	1,5	46,4	57,1
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	12	1,4	42,9	100,0
	Σύνολο	28	3,3	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	757	90,1		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	13	1,5		
	System	42	5,0		
	Σύνολο	812	96,7		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Πίνακας Γ4 - ΚΑΝ.ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό%
	ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΝ. ΠΟΛ.	2	,2	14,3	14,3
	ΓΡΑΦΕΙ ΤΗ ΣΧΕΣΗ λ=δημο/2 ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ	7	,8	50,0	64,3
	ΚΑΝΕΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΧΩΡΙΣ ΣΧΗΜΑ Η ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ	1	,1	7,1	71,4
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	4	,5	28,6	100,0
	Σύνολο	14	1,7	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	799	95,1		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	27	3,2		
	Σύνολο	826	98,3		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		

Πίνακας Γ5 - ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ 30,45,60

Έγκυρο		Συχνότητα	%	Έγκυρο %	Αθροιστικό%
	ΓΡΑΦΕΙ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ	8	1,0	32,0	32,0
	ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΙ ΚΑΤΑΛΛΗΛΑ ΟΡΘ. ΤΡΙΓ ΑΛΛΑ ΣΤΑΜΑΤΑ	3	,4	12,0	44,0
	ΔΕΝ ΕΦΑΡΜΟΖΕΙ Π.Θ. ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΕΙ ΤΙΣ ΑΓΝΩΣΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ.	1	,1	4,0	48,0
	ΣΩΣΤΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΟΝΟ ΤΩΝ 30,60.ΟΧΙ ΚΑΙ ΤΩΝ 45	1	,1	4,0	52,0
	ΕΛΛΙΠΗΣ ΓΝΩΣΗ	4	,5	16,0	68,0
	ΑΛΑΝΘΑΣΤΟ	8	1,0	32,0	100,0
	Σύνολο	25	3,0	100,0	
Άκυρα	ΔΕΝ ΡΩΤΗΘΗΚΕ	798	95,0		
	ΔΕΝ ΕΠΕΛΕΞΕ	17	2,0		
	Σύνολο	815	97,0		
	Γενικό Σύνολο	840	100,0		